Noções de Cálculo Diferencial e Integral para Tecnólogos

João Carlos Vieira Sampaio
Guillermo Antonio Lobos Villagra

9 de dezembro de 2011

Sumário

APRESENTAÇÃO

O cálculo diferencial e integral é assunto imprescindível na formação matemática de estudantes universitários de todas as ciências tecnológicas.

Basicamente, o cálculo diferencial e integral se ocupa de problemas envolvendo funções ou grandezas contínuas, modelando também fenômenos que envolvem dinâmicas dependendo de variáveis contínuas, como a variável tempo por exemplo.

Conceituações e quantificações de objetos matemáticos tais como velocidade instantânea, taxa de variação instantânea, quadratura (área) de uma região delimitada por curvas contínuas, valor médio de uma variável contínua etc., são todos pertencentes ao campo do cálculo diferencial e integral.

Essas notas de cálculo diferencial e integral foram escritas para alunos do curso de Tecnologia Sucroalcooleira da UAB-UFSCar.

Tais anotações fazem uma apresentação mínima dos conceitos fundamentais do cálculo, apresentando algumas de suas aplicações.

Ênfase especial é dada ao estudo de funções de uma variável e seus comportamentos, mediante as ferramentas do cálculo.

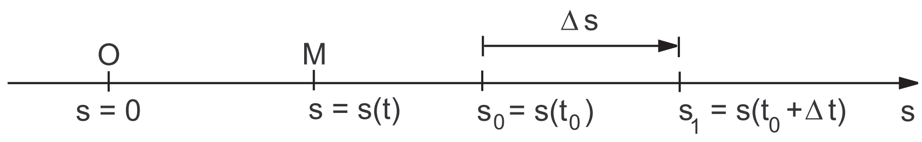
UNIDADE 1

Funções e suas derivadas

Caro estudante, o propósito da seção 1.1 é rever um conceito de cinemática que deu origem ao conceito de derivada, a ser apresentado na seção 1.4. O propósito da seção 1.2 é recapitular os conceitos de função e domínio de uma função.

1.1 Velocidade média e velocidade instantânea

Suponhamos que um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O.



O deslocamento ou posição s, do ponto M, em relação ao ponto O, é a distância de M a O, quando M está à direita de O, e é o negativo dessa distância quando M está à esquerda de O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O (e $s = 0$ no instante em que M está exatamente na posição do ponto O).

Com essas convenções, a reta passa a ser *orientada*, e passa a ser chamada de *eixo*, sendo O sua origem.

A posição s do ponto móvel M depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t, e escrevemos

$$s = s(t).$$

Suponhamos que em um determinado instante t_0, a posição de M é $s_0 = s(t_0)$, e que em um instante posterior t_1, a posição de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* $\bar{v}$ (lê-se "v *barra*") do ponto M, no intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$, é dada por

$$\bar{v} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Podemos escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, sendo $\Delta t = t_1 - t_0$, e também escrever $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (Δ lê-se "delta", Δt é lido "delta t", e Δs é lido "delta s").

Com isso, temos

$$\bar{v} = \frac{\text{variação de deslocamento}}{\text{variação de tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, é o *limite* da sua velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta é uma ideia geralmente atribuída a Isaac Newton (1643–1727)), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Observação 1.1 *É importante ter em mente que quando dizemos que uma quantia tende a zero, entendemos que ela se aproxima de zero arbitrariamente sem jamais tornar-se igual a zero. Uma quantia com essa propriedade é chamada* infinitésimo. *Assim, devemos pensar no infinitésimo como um objeto menor do que qualquer número (positivo) em que possamos pensar, mas que não é zero. Tanto quanto a ideia do infinito, isto é, a de um objeto maior do que qualquer número em que possamos pensar, o infinitésimo também não é um número. Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.) foi o primeiro a explorar a ideia de infinitésimo em seu Método de Exaustão para calcular áreas e volumes. Essencialmente, esse método faz parte do que hoje chamamos de Cálculo Diferencial e Integral.*

Exemplo 1.1 (Velocidade média no cotidiano)

Por exemplo, imaginemos que a linha reta é a rodovia Washington Luís, e que o ponto O é o marco zero (que fica na cidade de São Paulo) (imaginando que a rodovia se estenda até São Paulo, o que não acontece).

Suponhamos que o ponto M é um fusca que se move ao longo da rodovia, partindo de São Carlos, no quilômetro 235 (esta é a sua posição s_0 inicial), e viaja até São José do Rio Preto, quilômetro 440 (esta é a posição final s_1).

Suponhamos que o fusca sai de São Carlos às 16:30 (16 horas e 30 minutos), ou seja, $t_0 = 16{,}5$ h e chega a Rio Preto no mesmo dia, às 19:00, ou seja, $t_1 = 19$ h.

Qual é a sua velocidade média $\bar{v}$? A resposta é dada por

$$\bar{v} = \frac{\text{variação de deslocamento}}{\text{variação de tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{440 - 235}{19 - 16{,}5} = \frac{205}{2{,}5} = 82\text{km/h}.$$

A velocidade instantânea do fusca, em cada instante de sua viagem, é aquela que se lê no velocímetro do carro.

Exemplo 1.2 (Velocidade instantânea)

Para exemplificar como é calculada matematicamente a velocidade instantânea, vamos estudar agora o deslocamento de uma pedra em queda livre no ar. Neste caso, o ponto móvel M é a pedra (ou seu centro de massa) o eixo de deslocamento (queda) é vertical.

Segundo leis da física, o deslocamento da pedra no tempo t é dado (aproximadamente) pela equação $s(t) = 5t^2$, para t medido em segundos, e s em metros.

Assim, no instante $t = 0$, a pedra está na posição $s(0) = 5 \cdot 0^2 = 0$ (no instante $t = 0$ a pedra começa a cair). No instante $t = 1$ s, a pedra terá percorrido $5 \cdot 1^2 = 5$ metros, no instante $t = 2$ s, a pedra terá percorrido $5 \cdot 2^2 = 20$ metros, e assim por diante. A equação funciona enquanto a pedra não encontrar obstáculo. Na verdade, estamos desconsiderando a resistência do ar, e uma aproximação melhor do deslocamento da pedra no vácuo seria $s = 4{,}9\,t^2$.

Qual é a velocidade instantânea da pedra em um determinado instante t_0 ? O procedimento para calcularmos isto é o seguinte.

A partir do instante t_0, considere uma variação de tempo Δt (Δ lê-se "delta", Δt lê-se "delta t"). Vamos chamar $t_1 = t_0 + \Delta t$. Temos

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = 5(t_0 + \Delta t)^2 = 5(t_0^2 + 2t_0 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2).$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, no intervalo de tempo de t_0 a t_1 será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = 5t_0^2 + 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2 - 5t_0^2,$$

ou seja,

$$\Delta s = 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2.$$

A velocidade média da pedra, no intervalo de tempo de t_0 a t_1, será dada por

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t.$$

Já a *velocidade instantânea* $v(t_0)$ (uma novidade aqui) do ponto M, no instante t_0, é o limite da velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a 0, isto é, quando Δt se aproxima mais e mais da variação nula (permanecendo diferente desta). Dizemos que Δt torna-se um infinitésimo.

Observação 1.2 *Somar um infinitésimo, ou um múltiplo deste, a qualquer quantia deve provocar nessa quantia uma variação igualmente infinitesimal. Isto é,* $a + b\Delta t$ *tende a* a*, quando* Δt *tende a* 0*. Expressamos essa ideia escrevendo*

$$\lim_{\Delta t \to 0} (a + b\Delta t) = a + b \cdot 0 = a,$$

mas é importante deixar bem claro que Δt *realmente nunca é igual a zero na expressão* $(a + b\Delta t)$*. Neste cálculo,* a *e* b *representam quaisquer quantias que não dependem de* Δt*.*

De acordo com a observação anterior, podemos escrever

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t_0 + 5\Delta t) = 10t_0 + 5 \cdot 0 = 10t_0.$$

Isso significa que, em cada instante t, a pedra em queda livre tem velocidade instantânea $v(t) = 10t$ m/s.

1.2 Uma breve revisão sobre intervalos da reta e funções

Uma função f (ou função $f(x)$) é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (chamado domínio de f), a um único valor $y = f(x)$ de um certo conjunto B (chamado contra-domínio de f). Escrevemos $y = f(x)$. Também escrevemos Dom$(f) = A$.

Os domínios de funções tratadas neste curso serão sempre intervalos de $\mathbb{R}$ ou reuniões de intervalos de $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Os intervalos da reta (eixo) $\mathbb{R}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ de uma das formas:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo *fechado* de extremos a e b);

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo *aberto* de extremos a e b);

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalo de extremos a e b, *semiaberto* em b);

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalo de extremos a e b, *semiaberto* em a),

sendo a e b números reais, com $a < b$. Os intervalos anteriores são os *intervalos limitados*.

Os *intervalos ilimitados* são conjuntos de uma das formas (a e b são números reais, e o símbolo ∞ é lido “infinito”):

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (intervalo *fechado* de a a $+\infty$);

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (intervalo *aberto* de a a $+\infty$);

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (intervalo *fechado* de $-\infty$ a b);

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (intervalo *aberto* de $-\infty$ a b);

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (intervalo *aberto* de $-\infty$ a $+\infty$).

Como exemplos de funções e seus domínios, temos:

1. $f(x) = \sqrt{x}$ (ou $f(x) = x^{1/2}$) é uma função que tem como domínio o conjunto dos valores reais de x para os quais $\sqrt{x}$ existe e é um número real, ou seja, $x \geq 0$.

   Assim, dizemos que o *domínio* ou *campo de definição* de f é o intervalo Dom$(f) = [0, +\infty[$. Essa função associa cada número real não negativo x ao único número real não negativo $\sqrt{x}$.

2. $f(x) = 1/x$ define uma função cujo domínio é constituído pelos valores reais de x para os quais $1/x$ existe e é um número real, ou seja, pelos valores reais de x tais que $x \neq 0$.

   Assim, o *domínio* de f é o conjunto Dom$(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ou seja, Dom$(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

3. $f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ está definida para os valores reais de x para os quais $\sqrt{2-x}$ e $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ existem e são números reais, ou seja, para $x \leq 2$ $(2 - x \geq 0)$ e $x > 1$ $(x - 1 > 0)$.

   Assim, Dom$(f) =]1, 2]$.

4. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n inteiro positivo), ou $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

   Neste caso, Dom$(f) = \{x \mid x \geq 0\}$, se n é par, e Dom$(f) = \mathbb{R}$ se n é ímpar.

1.3 Problemas

1. Determine o *domínio* de cada uma das seguintes funções. Dê a resposta como um intervalo ou uma reunião de intervalos de $\mathbb{R}$. No nosso contexto, o domínio de uma função f é o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

   (a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$;

   (b) $f(x) = -\sqrt{4-x}$;

   (c) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$;

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$;

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Respostas e sugestões

1. (a) $\mathbb{R}$;

   (b) $]-\infty, 4]$;

(c) $[-2, 2]$.

Sugestão: usando a fórmula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, temos que $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$.

Lembre-se agora a regra de sinais: o produto $(2 - x)(2 + x)$ é ≥ 0 somente quando $2 - x \geq 0$ e $2 + x \geq 0$, ou quando $2 - x \leq 0$ e $2 + x \leq 0$.

(d) $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$.

Sugestão: fatore $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ e use a sugestão do item anterior.

(e) $]0, 2[$. *Sugestão*: fatore $x^2 - 2x = x(x - 2)$ e use a sugestão do item anterior. Lembre-se que o denominador de uma fração não pode ser zero.

1.4 A derivada de uma função

O conceito de derivada é uma generalização do conceito de velocidade instantânea, definida na seção 1.1, trocando-se a variável t (tempo) por uma grandeza variável x, e a função deslocamento $s(t)$ por uma função $f(x)$ qualquer.

Dada uma função $y = f(x)$, consideramos, para cada x, uma certa variação $\Delta x \neq 0$, e a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

A derivada de $f(x)$, denotada por $f'(x)$ (leia-se *"f linha de x"*) é a função definida como sendo o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Ou seja,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

1.5 Primeiras regras para calcular derivadas

O cálculo prático de derivadas é feito por meio de várias regras de derivação, que nos poupam do cálculo de limites. Faremos a partir de agora um catálogo dessas regras. Também escrevemos $\frac{dy}{dx}$ (leia-se "de y de x") para indicar a derivada de uma função $y = f(x)$.

Como primeira e importante regra para o cálculo de derivadas, temos:

Regra 1 *Se* $f(x) = x^n$, *sendo* n *inteiro positivo, então* $f'(x) = nx^{n-1}$.

De maneira simplificada, escrevemos $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Observação 1.3 *Esta regra continua válida se o expoente* n *for inteiro ou fracionário, negativo ou positivo.*

Exemplo 1.3 *De acordo com a regra 1, temos*

$(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$, *ou seja, se* $y = x$, *então* $\dfrac{dy}{dx} = 1$.

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$, *ou seja, se* $y = x^2$, *então* $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, *ou seja, se* $y = x^3$, *então* $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$.

$(x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$.

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

É importante lembrar que $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ *quando* p *e* q *são inteiros, e* $q > 0$.

Regra 2 *A derivada de uma função constante é* 0, *isto é,*

se $f(x) = c$ = *constante, então* $f'(x) = (c)' = 0$.

Regra 3 *Se* $f(x)$ *é uma função e* c *é uma constante, então*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma constante vezes uma função *é a constante vezes a derivada da função.*

Regra 4 *Sendo* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções, valem as seguintes igualdades*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

e

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Ou seja, a derivada da soma de duas funções é a soma das respectivas derivadas, e a derivada da diferença de duas funções é a diferença das respectivas derivadas.

Exemplo 1.4 *Calcular a derivada de* $f(x) = 2x^3 - 3x^5$, *em relação a* x. *Para tal,* *aplicamos as regras previamente estabelecidas:*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x^3 - 3x^5)' \\
&= (2x^3)' - (3x^5)' && ((f-g)' = f' - g') \\
&= 2(x^3)' - 3(x^5)' && ((cf)' = cf') \\
&= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 5x^4 && ((x^n)' = nx^{n-1}) \\
&= 6x^2 - 15x^4.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.5 *Sendo* $y = -3t^6 + 21t^2 - 98$*, calcular a derivada* $\dfrac{dy}{dt}$.

Aplicando as regras estabelecidas anteriormente, temos que

$$\frac{dy}{dt} = (-3t^6 + 21t^2 - 98)' = -18t^5 + 42t.$$

1.6 Problemas

1. Se um objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial 110 m/s, então a sua altura $h(t)$, acima do chão ($h = 0$), após t segundos, é dada (aproximadamente) por $h(t) = 110t - 5t^2$ metros. Quais são as velocidades do objeto nos instantes $t = 3$ s e $t = 4$ s? Em que instante o objeto atinge sua altura máxima?

2. Usando as regras de derivação estabelecidas até agora, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(t) = -6t^3 + 12t^2 - 4t + 7$;

   (b) $f(t) = (3t + 5)^2$.

   Sugestão: primeiro desenvolva o quadrado, usando a fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   Se quiser deduzir esta fórmula, faça $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, e desenvolva o produto.

   (c) $f(x) = (-2x^2 + 1)^3$.

   Sugestão: primeiro desenvolva o cubo. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Essa fórmula pode ser deduzida escrevendo-se

   $$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b),$$

   e empregando-se a fórmula para $(a + b)^2$ do item anterior.

(d) $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)(x^2 + x - 1)$.

Sugestão: Primeiro desenvolva o produto.

(e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$.

Respostas e novas sugestões

1. (A velocidade instantânea do objeto, no instante t, é a derivada $\frac{dh}{dt}$)

   80 m/s e 70 m/s.

   Em $t = 11$ s. *Sugestão*: no instante em que o objeto atinge sua altura máxima, sua velocidade é igual a zero (o objeto para instantaneamente).

2. (a) $f'(t) = -18t^2 + 24t - 4$;

   (b) $f'(t) = 18t + 30$;

   (c) $f'(x) = -48x^5 + 48x^3 - 12x$;

   (d) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 18x + 8$;

   (e) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{5}$.

1.7 Outras regras para calcular derivadas

Regra 5 (derivada de um produto)

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Regra 6 (derivada de um quociente)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Regra 7 *Sendo g uma função derivável, e c uma constante, quando $g \neq 0$, temos*

$$\left(\frac{c}{g}\right)' = -\frac{cg'}{g^2}.$$

Exemplo 1.6 *Calcular y', sendo $y = \dfrac{2}{x^3 + 1}$.*

Solução. Aplicando a regra 7, temos

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{2}{x^3+1}\right)' &= \frac{-2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-2 \cdot 3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{-6x^2}{(x^3+1)^2}. \end{aligned}$$

Atenção ! Ao calcular derivadas de expressões fracionárias, é **desaconselhável desenvolver o quadrado do denominador** ! Tal procedimento é desnecessário no cálculo de derivadas e é desaconselhável quando fazemos uso de derivadas (isso será esclarecido nas notas mais adiante).

Exemplo 1.7 *Calcular* y'*, sendo* $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

Solução. Aplicando a fórmula para a derivada de um quociente, temos

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' &= \frac{(x^3 - 1)'(x^3 + 1) - (x^3 + 1)'(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

1.8 Problemas

1. Utilizando regras de derivação previamente estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \dfrac{4x - 5}{3x + 2}$;

   (b) $f(w) = \dfrac{2w}{w^3 - 7}$;

   (c) $s(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.

Respostas

1. (a) $f'(x) = \dfrac{23}{(3x + 2)^2}$;

   (b) $f'(w) = \dfrac{-4w^3 - 14}{(w^3 - 7)^2}$;

   (c) $s'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3}$.

UNIDADE 2

Retas tangentes, derivação em cadeia, e derivadas de funções implícitas

2.1 A derivada mede inclinações de retas tangentes ao gráfico

Veremos agora uma importante interpretação geométrica da derivada, em relação ao gráfico da função $y = f(x)$.

Fixado um valor x_0, sendo definido $f(x_0)$, seja $\Delta x \neq 0$ um acréscimo (ou decréscimo) dado a x_0. Sendo $x_1 = x_0 + \Delta x$, temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o *coeficiente angular* (ou *inclinação*, ou *declividade*) da reta r, secante ao gráfico da curva $y = f(x)$, passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_1, f(x_1))$.

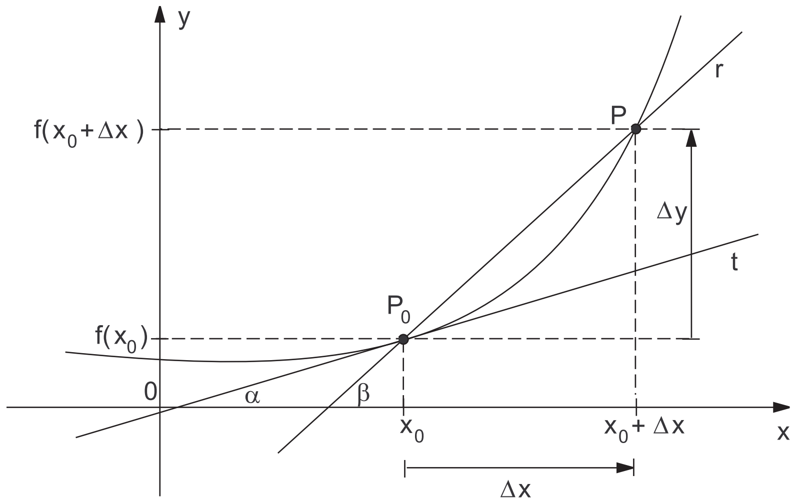


Figura 2.1 Quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0, e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, que tangencia o gráfico de f no ponto P_0.

Observando os elementos geométricos da Figura 2.1, temos que quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0, e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, que tangencia o gráfico de f no ponto P_0. Assim, quando Δx tende a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tem como limite a declividade da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P_0.

Assim, com este argumento geométrico e intuitivo, interpretamos $f'(x_0)$ como sendo o coeficiente angular (ou a inclinação, ou ainda, a declividade) da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Da geometria analítica, temos que a equação de uma reta, de coeficiente angular m, passando por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Assim sendo, temos que a equação da reta t, tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ ou } y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Desse modo, a função linear afim $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ é uma aproximação da função $y = f(x)$ quando x está suficientemente próximo de x_0.

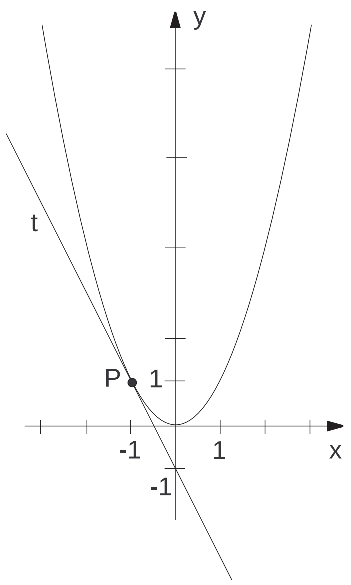


Figura 2.2 Representação gráfica da curva $y = x^2$ e da reta t, tangente à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Exemplo 2.1 *Qual é a equação da reta* t*, que tangencia a parábola* $y = x^2$*, no ponto* $P = (-1, 1)$*?*

Solução. Sendo $y = x^2$, pela regra de derivação 1, temos $\frac{dy}{dx} = 2x$. Em P, temos $x = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = (2x)|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$$

Assim, a reta t, tangente à curva $y = x^2$ no ponto P, tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1)),$$

ou seja, $y = -2x - 1$. Assim, próximo ao ponto $P = (-1, 1)$, a reta $y = -2x - 1$ nos dá uma boa aproximação linear afim da parábola $y = x^2$. Confira isto pela Figura 2.2.

Exemplo 2.2 *Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola* $y = f(x) = 3 - 4x - x^2$*, no ponto de abscissa (primeira coordenada)* 3. *Determine a equação dessa reta. Em qual ponto do gráfico a reta tangente ao gráfico é horizontal?*

Solução. O coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = 3 - 4x - x^2$, no ponto de abscissa 3, é $m = f'(3)$. Como $f'(x) = -4-2x$, temos $m = -4-2\cdot 3 = -10$.

O ponto do gráfico, com abscissa 3, é o ponto $P = (3, f(3)) = (3, -18)$. A equação da reta pedida é $y - f(3) = f'(3)(x-3)$, ou seja, $y + 18 = -10(x-3)$. Simplificando esta equação, ela fica $y = -10x + 12$.

No ponto $(x, f(x))$ em que a reta tangente é horizontal, temos $m = 0$, ou seja, $f'(x) = 0$. Logo, $x = -2$. Assim, o ponto procurado é $(-2, f(-2)) = (-2, 7)$.

2.2 Derivação em cadeia

A *regra da cadeia* é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma *composição* (ou um *encadeamento*) de funções, tais como $f(g(x))$ ou $f(g(h(x)))$, conhecendo-se as derivadas $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$.

Regra 8 (regra da derivação em cadeia, ou regra da cadeia)

Se $y = f(g(x))$*, fazemos* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$*, e então*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Outra forma da regra da cadeia é a seguinte:

Sendo $y = f(u)$*, então* $y' = f'(u) \cdot u'$*, ou ainda*

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observação 2.1 (as diferentes formas da regra da cadeia são equivalentes)

Quando $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$ *a regra da cadeia nos diz que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Exemplo 2.3 *Calcular a derivada de* $y = (x^3 + x - 1)^{10}$*. Para aplicar a regra da cadeia, primeiramente escrevemos*

$$y = u^{10}, \quad u = x^3 + x - 1.$$

Aplicando derivação em cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\\ &= 10u^9 \cdot (3x^2+1)\\ &= 10(x^3+x-1)^9(3x^2+1).\end{aligned}$$

Regra 9 (importante consequência da derivação em cadeia)

Se $y = [f(x)]^n$*, então*

$$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x).$$

De modo mais simples, se $y = u^n$*, sendo* u *uma função de* x*, obtemos*

$$y' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

Esta regra é verdadeira se n *é inteiro ou fracionário (número racional), positivo ou negativo.*

Justificativa: sendo $y = [f(x)]^n$, podemos escrever $y = u^n$, sendo $u = f(x)$. Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot u',$$

ou seja, $([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$.

Exemplo 2.4 *Calcular* $\frac{dy}{dx}$*, sendo* $y = [(x^2+1)^{10}+1]^8$.

Solução. Aplicando a Regra de derivação 9 várias vezes, temos a solução:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ([(x^2+1)^{10}+1]^8)'\\ &= 8[(x^2+1)^{10}+1]^{8-1} \cdot [(x^2+1)^{10}+1]'\\ &= 8[(x^2+1)^{10}+1]^7 \cdot [(x^2+1)^{10}]'\\ &= 8[(x^2+1)^{10}+1]^7 \cdot 10(x^2+1)^9 \cdot (x^2+1)'\\ &= 80[(x^2+1)^{10}+1]^7(x^2+1)^9 \cdot 2x\\ &= 160x[(x^2+1)^{10}+1]^7(x^2+1)^9.\end{aligned}$$

Exemplo 2.5 *Calcular a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+3x+5}$.

Solução. Temos $f(x) = (3x^2+3x+5)^{\frac{1}{3}}$.

Aplicando a Regra 9, temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [(3x^2+3x+5)^{\frac{1}{3}}]' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+3x+5)' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(6x+3) \\
&= (3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(2x+1) \\
&= \frac{2x+1}{(3x^2+3x+5)^{2/3}} = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(3x^2+3x+5)^2}}.
\end{aligned}
$$

2.3 Problemas

1. Escreva a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ no ponto de abcissa $x = 3$.

2. Aplicando derivação em cadeia (quando necessário), calcule $\frac{dy}{dx}$ nos seguintes casos:

   (a) $y = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)^5 + \left(\frac{x^2}{2}+1\right)^4$.

   (b) $y = (x^2 - 3x + 8)^3$.

   (c) $y = \frac{x}{(x^2-1)^4}$.

3. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$.

   (b) $f(t) = \frac{4}{(9t^2+16)^{2/3}}$.

4. Em cada item, determine (i) a equação da reta tangente à curva dada no ponto P indicado, e (ii) os pontos da curva em que reta tangente a ela é horizontal.

   (a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4, \quad P = (2, 81)$.

   (b) $y = (2x-1)^{10}, \quad P = (1, 1)$.

Respostas e sugestões

1. $y - 2 = 8(x-3)$, ou $y = 8x - 22$.

2. (a) $\frac{dy}{dx} = 5x^2\left(\frac{x^3}{3}+1\right)^4 + 4x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^3$,

   (b) $y = 3(x^2-3x+8)^2(2x-3)$,

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(7x^2+1)}{(x^2-1)^5}$.

3. (a) $f'(x) = 8x^2(8x^3+27)^{-2/3} = \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$,

(b) $f'(t) = \dfrac{-48t}{\sqrt[3]{(9t^2+16)^5}}$.

Sugestão: Primeiramente, faça $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2+16)^{2/3}} = 4(9t^2+16)^{-2/3}$.

4. (a) (i) $y - 81 = 864(x-2)$, (ii) $(1,1)$, $(1/2,0)$ e $(3/2,0)$.

(b) (i) $y - 1 = 20(x-1)$, (ii) $(1/2,0)$.

2.4 Derivadas de funções dadas implicitamente

Muitas vezes, duas variáveis x e y são tais que y depende de x, ou seja, y é uma função da variável x, mas em lugar de uma fórmula $y = f(x)$, temos uma equação $F(x,y) = c$, inter-relacionando ambas as variáveis, tal como no exemplo

$$x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y.$$

Nem sempre é possível resolver a equação dada em y, ou seja, "isolar" y no primeiro membro da equação, expressando explicitamente y como função de x.

No entanto, é (quase sempre) possível obter a derivada $\dfrac{dy}{dx}$, para $x = x_0$ e $y = y_0$, se o ponto (x_0, y_0) pertencer à curva, isto é, se ele satisfizer a equação dada.

Para isto, derivamos ambos os membros da equação $F(x,y) = c$, considerando y como função de x, e usamos as regras de derivação, bem como a regra da cadeia quando necessário. Depois disto, isolamos y' no primeiro membro da equação obtida.

Exemplo 2.6 *Obter* $\dfrac{dy}{dx}$*, a partir da equação* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$*, por derivação implícita.*

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= x^2y^2 + x + y,\\
(x^3 + y^3)' &= (x^2y^2 + x + y)',\\
3x^2 + 3y^2y' &= (x^2y^2)' + 1 + y',\\
3x^2 + 3y^2y' &= (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' + 1 + y',\\
3x^2 + 3y^2y' &= 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + 1 + y'.
\end{aligned}$$

Daqui obtemos y', deixando no primeiro membro somente os termos com y':

$$3y^2y' - 2x^2yy' - y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2,$$
$$(3y^2 - 2x^2y - 1)y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2,$$
$$y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}.$$

Exemplo 2.7 *Obter a reta tangente à curva $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$, no ponto $P = (1, 0)$ dessa curva.*

Note que o problema só faz sentido porque o ponto $(1, 0)$ de fato pertence à curva: $1^3 + 0^3 = 1^2 \cdot 0^2 + 1 + 0$.

Primeiro obtemos $\frac{dy}{dx}$, por derivação implícita, a partir da equação da curva.

Isto já foi feito no exemplo anterior, em que calculamos $y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}$.

O coeficiente angular da reta tangente procurada é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \left.\frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{1 - 3}{-1} = 2.$$

Desse modo, a reta procurada tem equação $y - 0 = 2(x - 1)$, ou seja, $y = 2x - 2$.

Assim sendo, próximo ao ponto $P = (1, 0)$, a curva $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ pode ser aproximada pela reta $y = 2x - 2$.

2.5 Problemas

1. Determine y' sendo y uma função de x dada implicitamente pela equação

   (a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$;

   (b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

2. Verifique primeiramente que o ponto P pertence à curva dada (isto é, satisfaz a equação dada) e, usando derivação implícita, determine a equação da reta tangente à curva no ponto P.

   (a) $xy = -16, \quad P = (-2, 8)$;

   (b) $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0, \quad P = (2, -3)$.

Respostas

1. (a) $y' = \frac{-(6x^2 + 2xy)}{x^2 + 3y^2}$;

(b) $y' = -\dfrac{y^3}{x^3}$.

2. (a) $4x - y + 16 = 0$;

(b) $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$.

UNIDADE 3

Limites (cálculo e significado)

Cálculos de limites são importantes ferramentas auxiliares no estudo de funções e seus gráficos. A definição formal de *limite* é matematicamente sofisticada. O leitor interessado poderá encontrá-la em textos universitários sobre cálculo. Faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, apenas por meio de exemplos e interpretações gráficas.

3.1 Introdução intuitiva ao cálculo de limite

Nesta seção, estudaremos os primeiros exemplos de limites.

Exemplo 3.1 *Considere a função* $f(x) = 2x+3$*. Quando* x *assume uma infinidade de valores aproximando-se mais e mais de* 0*, o número* $2x + 3$ *assume uma infinidade de valores, aproximando-se de* $2 \cdot 0 + 3 = 3$*. Dizemos que o limite de* $f(x)$*, quando* x *tende a* 0*, é igual a* 3*, e escrevemos*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(2x + 3) = 2 \cdot 0 + 3.$$

Exemplo 3.2 *Aqui temos uma lista de outros exemplos intuitivos.*

1. $\lim\limits_{x \to a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$.
2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$.
3. *Sendo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, com os coeficientes* $a_n, \dots, a_0$ *todos reais,*

   $$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0).$$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 1)} = \dfrac{2^3 - 3}{2^4 + 1} = \dfrac{8 - 3}{4 + 1} = 1.$

Definição 3.1 *Nos exemplos anteriores, de limites de* $f(x)$*, com* x *tendendo a* x_0*, tivemos sempre* x_0 *no domínio da função* $f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*.*

Quando isto ocorre, dizemos que a função $f(x)$ *é* contínua no ponto x_0.

No próximo exemplo, temos um limite em que $x \to x_0$, mas x_0 não está no domínio de f.

Exemplo 3.3 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$*.*

Solução. Note que, sendo $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, temos que $2 \notin \mathrm{Dom}(f)$. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Um cálculo direto nos dá então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0}.$$

Este resultado, $0/0$, é um *símbolo de indeterminação*, ocorrendo em uma tentativa de calcular um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.

Para contornar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo fazemos uso da fórmula de fatoração $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} \qquad \text{(pois } x-2 \neq 0\text{)} \\
&= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \\
&= 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4 (cálculo de um limite com mudança de variável) *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}.$$

Um cálculo direto nos dá $0/0$, uma *indeterminação*.

Fazendo $y = \sqrt[3]{x+1}$, temos $y^3 = x+1$, e portanto $x = y^3 - 1$.

Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \to 0$, então $y \to 1$). E aí temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3.2 Limites infinitos; limites quando $x \to \infty$

Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de 0, isto é, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Observe a Tabela 3.1. Na primeira coluna da Tabela 3.1, temos valores de x cada vez mais próximos de 0. Na segunda coluna, notamos que os valores de x^2 estão ainda mais próximos de zero do que os valores de x. Assim temos $\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 = 0}$. Na última coluna, vemos que os valores correspondentes de $f(x) = 1/x^2$ tornam-se cada vez maiores.

Tabela 3.1 Valores de x cada vez mais próximos de 0, e correspondentes valores de x^2 e de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	4
$\pm 0,2$	$0,04$	25
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "+ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ ou seja, } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}.$$

A interpretação geométrica de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ pode ser visualizada na Figura 3.1.

Tabela 3.2 Tabela de valores de x cada vez maiores, e correspondentes valores de x^2 e de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	0,25
5	25	0,04
10	100	0,01
100	10000	0,0001
1000	1000000	0,000001

Agora observe a Tabela 3.2. Notamos agora que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pela Figura 3.1.

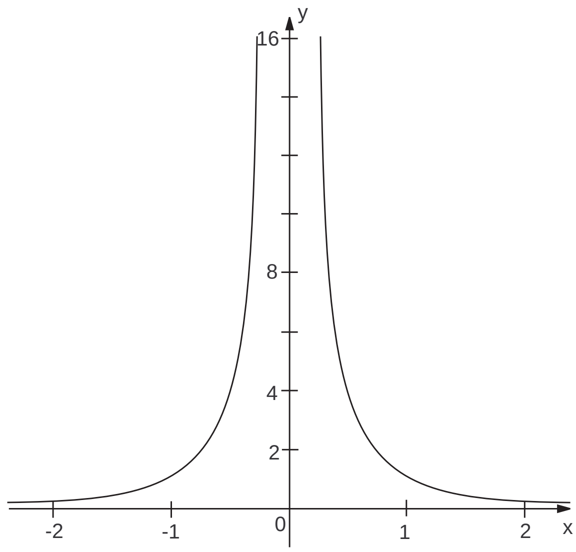


Figura 3.1 Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, ou seja, à medida que x se aproxima de 0, $y = \frac{1}{x^2}$ torna-se cada vez maior. Também $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, ou seja, à medida que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $\frac{1}{x^2}$ aproxima-se de 0. E ainda $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "$+$ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0}$.

Na segunda coluna da Tabela 3.2 também ilustramos: $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$.

Também visualizamos os fatos: $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty}$ e $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0}$.

Com estes exemplos simples damos início à nossa *álgebra de limites*. Ao calcular limites podemos fazer uso da seguinte "tabuada":

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(\pm\infty)^2 = +\infty, \qquad (+\infty)(-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)^3 = +\infty, \qquad (-\infty)^3 = -\infty,$$

$$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} = +\infty, \qquad (-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} = -\infty,$$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0,$$

$$+\infty + c = +\infty \ (c \text{ constante}), \qquad -\infty + c = -\infty \ (c \text{ constante}),$$

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } c > 0 \\ -\infty, & \text{se } c < 0 \end{cases}, \qquad c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } c < 0 \\ -\infty, & \text{se } c > 0 \end{cases},$$

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } c > 0 \\ -\infty, & \text{se } c < 0 \end{cases}, \qquad \frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } c < 0 \\ -\infty, & \text{se } c > 0 \end{cases}.$$

Mas atenção! Cautela com essa nova "aritmética"! Os "resultados"

$$\tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad \text{e} \quad 0 \cdot (\pm\infty),$$

são novos *símbolos de indeterminação*. Nada significam como valores de limites. Se chegarmos a algum deles no cálculo de um limite, teremos que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo 3.5 *Calcular* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$.

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \frac{+\infty - (+\infty) - 1}{+\infty + 4}.$$

Para evitarmos os símbolos de indeterminação, quando $x \to \pm\infty$, colocamos em evidência as potências de x de maior grau, no numerador e no denominador.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 + \frac{4}{x^3})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{x(1 + \frac{4}{x^3})} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{+\infty} - \frac{1}{+\infty}}{+\infty(1 + \frac{4}{+\infty})} = \frac{3 - 0}{+\infty \cdot (1 + 0)} = \frac{3}{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Exemplo 3.6 *Calcular* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - x^3)$.

Temos $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$, portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.

Podemos no entanto fazer

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = \lim_{x \to -\infty} x^5(1 - \tfrac{1}{x^2}) = (-\infty)^5 \cdot (1 - 0) = -\infty.$$

Nos limites da forma $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x, prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

e

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

então

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n,$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Por exemplo, nos exemplos que acabamos de estudar, bastaríamos fazer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{x\cdot\cancel{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^5=(-\infty)^5=-\infty.$$

Mas atenção. Isto só vale para limites envolvendo polinômios, e somente quando $x\to\pm\infty$.

3.3 Problemas

1. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$; (b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$; (c) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

(d) $\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$; (e) $\lim_{x\to\sqrt{2}}15$; (f) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$.

2. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; (b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$;

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$; (d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$.

Respostas e sugestões

1. (a) 4; (b) $1/9$. *Sugestão*: $2x^2+5x-7=(2x+7)(x-1)$; (c) $3x^2$; (d) $5\sqrt{2}-20$; (e) 15; (f) $-3/8$. *Sugestão*: $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$.

2. (a) 2. *Sugestão*: $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$. No numerador e no denominador, coloque em evidência as potências de x de maior grau; (b) 0. *Sugestão*: $\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^3}}$; (c) 0; (d) 72.

3.4 Algumas interpretações geométricas de limites

Na Figura 3.2 temos o esboço de um gráfico de uma função definida no conjunto
$\mathbb{R} - \{x_0\}$, ou seja, apenas para $x \neq x_0$, para a qual $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

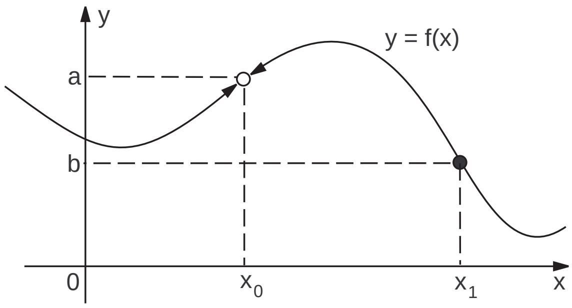


Figura 3.2 Para a função $f(x)$ aqui representada graficamente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

Na Figura 3.3 temos o esboço de um gráfico de uma função definida em todo o conjunto $\mathbb{R}$, para a qual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

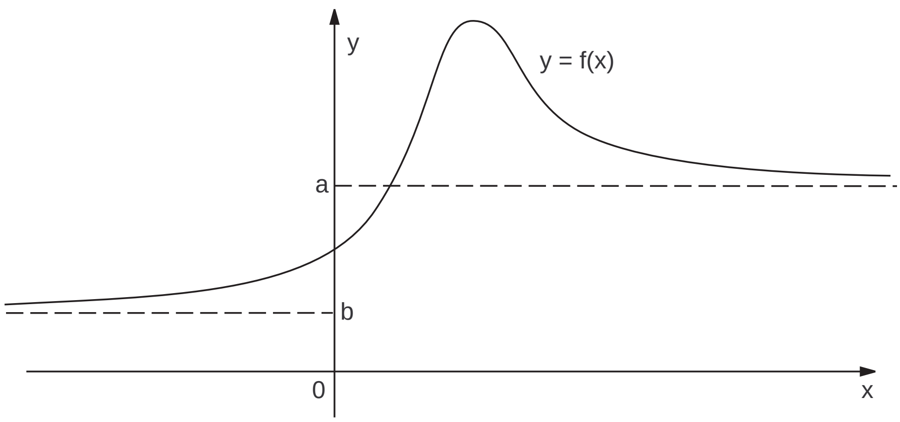


Figura 3.3 Para esta função $f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Na Figura 3.4 temos o esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Na Figura 3.5 ilustramos o esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

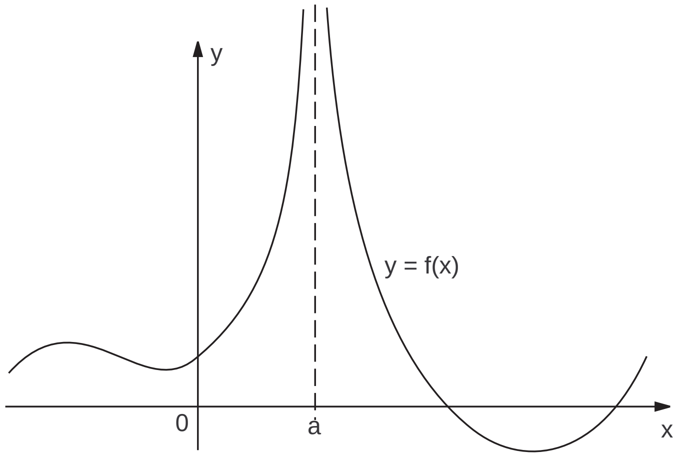


Figura 3.4 Para esta função $f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

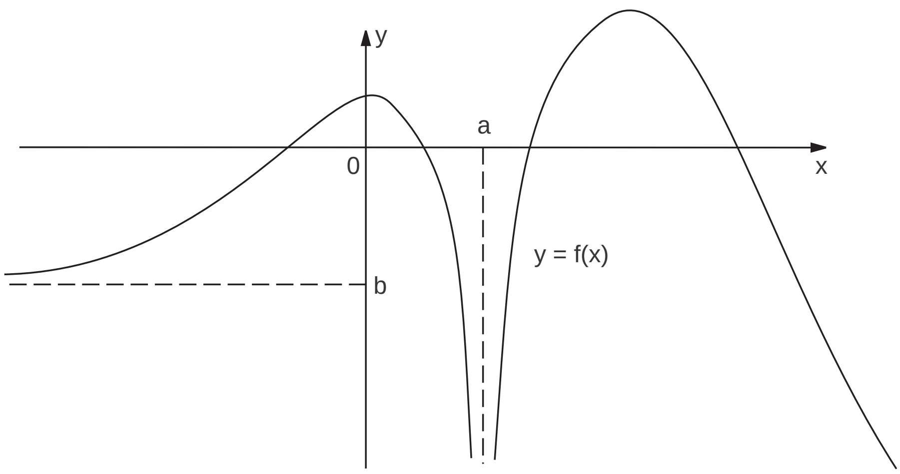


Figura 3.5 Para esta função $f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3.5 Limites laterais

Para cada número real x define-se o *módulo* ou *valor absoluto* de x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+3| = 3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$.

Para apresentar o conceito de limites laterais, consideraremos a função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}.$$

O domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto $f(x) = x + 1$. Se $x < 0$, $|x| = -x$ e portanto $f(x) = x - 1$. O gráfico de f é esboçado na Figura 3.6.

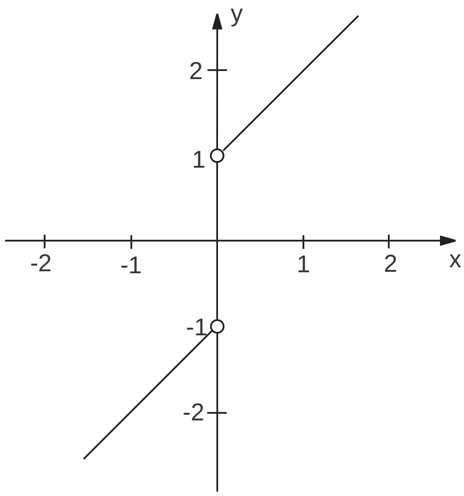


Figura 3.6 Esboço do gráfico de $y = x + \dfrac{x}{|x|}$.

Se x tende a 0, mantendo-se positivo (> 0), $f(x)$ tende a 1. Se tende a 0, mantendo-se negativo (< 0), $f(x)$ tende a -1.

Dizemos então que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Dizemos também que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

De um modo geral, se x_0 está no interior ou é extremo inferior de um intervalo contido em Dom(f),

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \;\text{ significa }\; \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \;\text{ significa }\; \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x).$$

Exemplo 3.7 (limites laterais com valores infinitos)

Consideremos agora a função $f(x) = 1/x$. Temos

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[.$$

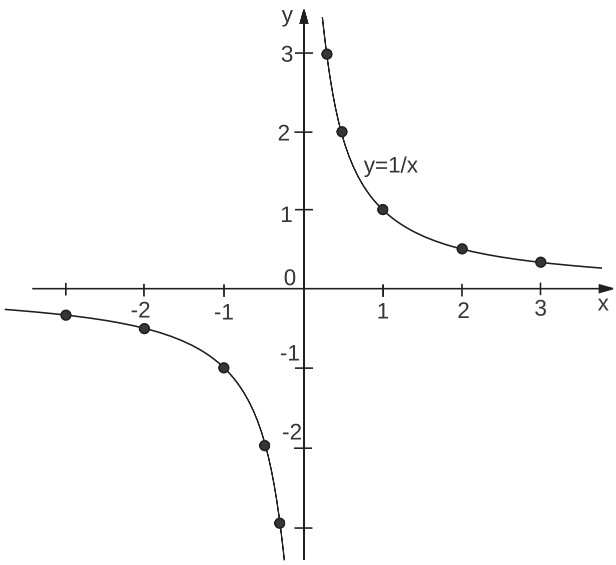


Figura 3.7 Gráfico de $y = 1/x$.

No esboço do gráfico de f, Figura 3.7, ilustramos a ocorrência dos limites laterais

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(Também ilustramos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.)

Neste caso, é conveniente denotar, introduzindo novos símbolos em nossa álgebra de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Observação 3.1 *Em geral, dizemos que*

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$*, se*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$*, e*

(ii) $f(x) > 0$ *quando* x *está suficientemente próximo de* x_0*.*

Dizemos que

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$*, se*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$*, e*

(ii) $f(x) < 0$ *quando* x *está suficientemente próximo de* x_0*.*

Nossa álgebra de limites passa a contar agora com os seguintes novos resultados:

$$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}, \qquad \frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}.$$

Também é fácil concluir que

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty, \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty, \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, \qquad e \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Exemplo 3.8

(i) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0^+$, *portanto* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$*;*

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x-3}{x} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$*;*

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{5}{+\infty} = 0^+$.

Exemplo 3.9 *Calcular* $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+2}{|x+2|}$ *e* $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Solução. Observe que $x + 2 > 0$ se e somente se $x > -2$.

Assim sendo, se $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e então $|x + 2| = x + 2$.

Por outro lado, se $x < -2$, temos $x + 2 < 0$ e então $|x + 2| = -(x + 2)$.

Assim sendo, temos

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2} -1 = -1.$$

Observação 3.2 *Se a função* $f(x)$ *está definida para valores de* x *próximos de* x_0 *e abaixo de* x_0*, e também para valores de* x *próximos de* x_0 *e acima de* x_0*, a afirmação*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

é equivalente à afirmação, simultânea, de que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a.$$

3.6 Continuidade, diferenciabilidade, e gráficos

Observação 3.3 (o gráfico de uma função contínua em $[a, b]$)

Vimos anteriormente que a função $f(x) = x + x/|x|$ tem limites laterais diferentes no ponto $x_0 = 0$, sendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Assim, conforme podemos visualizar na Figura 3.6, o gráfico de f apresenta um "salto" no ponto 0.

Também a função $f(x) = 1/x$ tem um salto no ponto 0. Agora porém o salto é infinito, sendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

Quando uma função $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, a curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, gráfico de f no intervalo $[a, b]$, não apresenta saltos.

Intuitivamente falando, quando $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, podemos traçar o gráfico, ligando o ponto inicial $A = (a, f(a))$ ao ponto final $B = (b, f(b))$, sem tirar o lápis do papel, tal como na Figura 3.8.

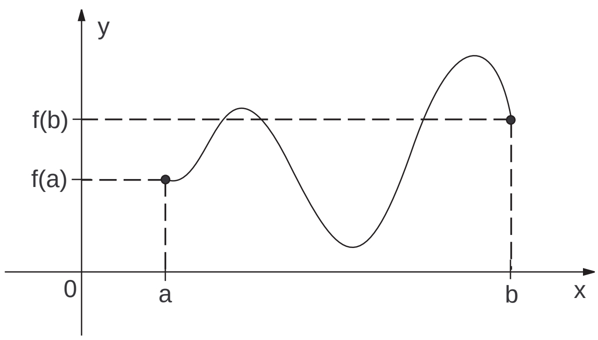


Figura 3.8 f é contínua e diferenciável (derivável) no intervalo $[a, b]$.

Observação 3.4 (uma função contínua nem sempre tem derivada)

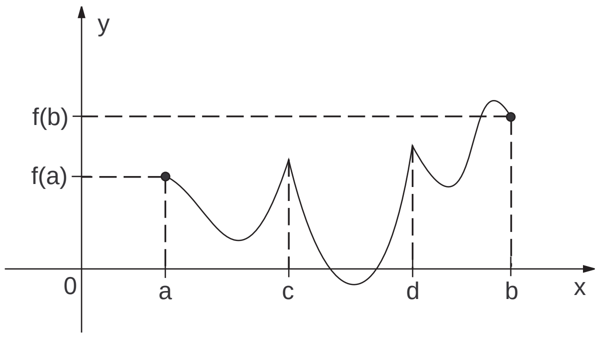


Figura 3.9 f é contínua no intervalo $[a, b]$, mas não tem derivadas nos pontos c e d.

Na Figura 3.9 temos o osboço do gráfico de uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que, no entanto, não tem derivada em dois pontos (valores de x)

desse intervalo. Nos pontos correspondentes a c e d, os gráficos formam “bicos” e não se definem retas tangentes ao gráfico de f.

Quando a função é diferenciável no intervalo $]a, b[$, o seu gráfico é uma curva “suave”, tal como ilustrado na Figura 3.8.

3.7 Problemas

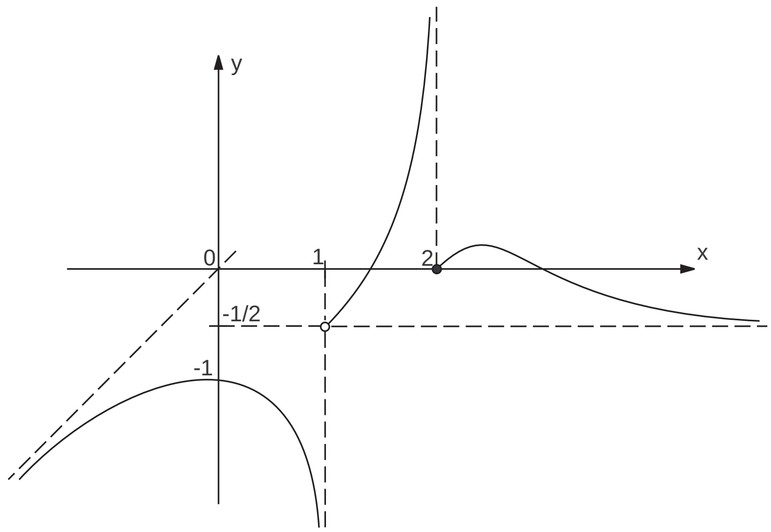


Figura 3.10 Gráfico para o problema 1.

1. Na Figura 3.10 está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades:

   (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ (c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

   (d) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ (e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ (f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

   (g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ (h) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

2. Em que pontos a função f do problema anterior é definida? Em quais pontos é contínua?

3. Calcule os limites laterais

   (a) $\lim_{x\to \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x - \pi}$; (b) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{|\pi - x|}{x - \pi}$; (c) $\lim_{x\to 8^-} \frac{1}{x - 8}$;
   (d) $\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x - 8}$; (e) $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x - 2}$.

4. Para as funções $f(x)$ abaixo, calcule os limites $\lim_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$. Diga também se f é contínua no ponto -3.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt[3]{4+x} & \text{se } x > -3 \end{cases}$.

Respostas e sugestões

1. (a) $-\infty$; (b) $-1/2$; (c) $+\infty$; (d) 0; (e) -1; (f) -1; (g) $-1/2$; (h) $-\infty$.

2. A função f é definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. É contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

3. (a) -1; (b) 1; (c) $-\infty$; (d) $+\infty$; (e) 0.

4. (a) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt[3]{x+2} = -1$,
$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{1}{2-3x} = 1/11$.
Não se define (não existe) o limite $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$. Temos $f(-3) = -1$, mas como não existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.

   (b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$.
Logo, f é contínua no ponto -3 pois $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$.

UNIDADE 4

Desenhando gráficos de funções, por meio de limites e derivadas

As figuras são parte essencial desta unidade. Todas as definições e propriedades devem ser estudadas e confrontadas com as figuras que as interpretam.

4.1 Crescimento e decrescimento

Definição 4.1

1. *Dizemos que a função* $f(x)$ *é crescente no intervalo* I *se, nesse intervalo, quando* x *aumenta de valor,* $f(x)$ *também aumenta de valor.*
2. *Dizemos que a função* $f(x)$ *é decrescente no intervalo* I *se, nesse intervalo, quando* x *cresce em valor,* $f(x)$ *decresce.*

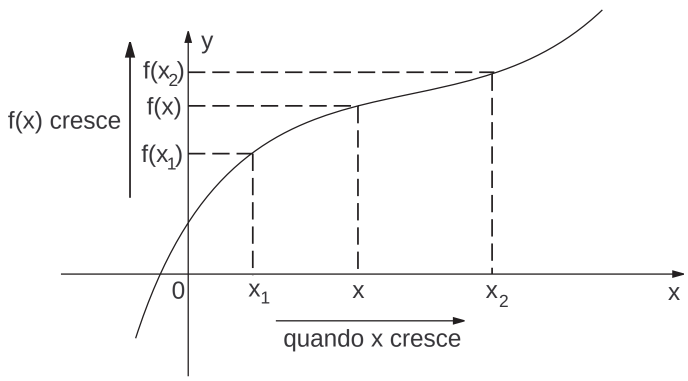


Figura 4.1 f é crescente em um certo intervalo I.

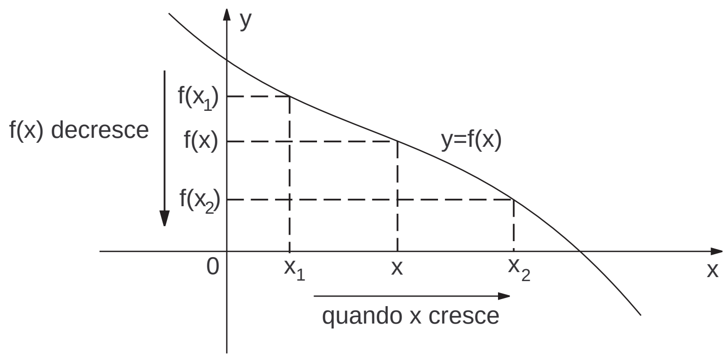


Figura 4.2 f é decrescente em um certo intervalo I.

Teorema 4.1 *Suponhamos que* f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e tem derivada nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$*.*

1. *Se* $f'(x) > 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$*, então* f *é crescente no intervalo fechado* $[a, b]$*.*

2. *Se* $f'(x) < 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$*, então* f *é decrescente no intervalo fechado* $[a, b]$*.*

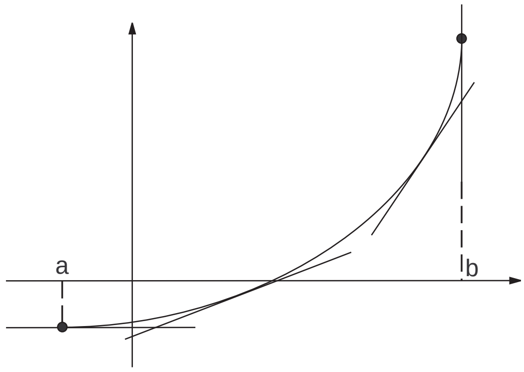


Figura 4.3 Se a derivada $f'(x)$ se mantém positiva quando $a < x < b$, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico são sempre positivos, e assim a função é crescente no intervalo $[a, b]$.

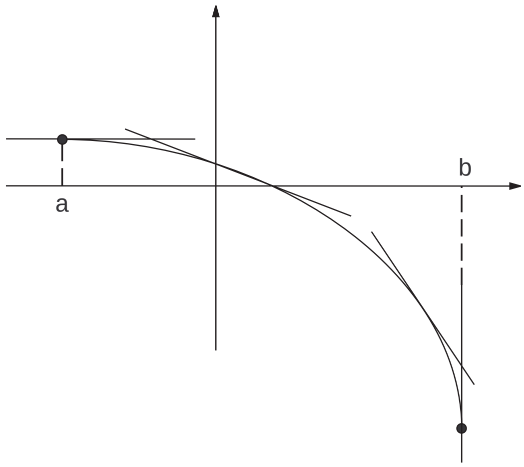


Figura 4.4 Se a derivada $f'(x)$ se mantém negativa quando $a < x < b$, as retas tangentes ao gráfico são inclinadas para a esquerda, e assim a função é decrescente quando $a \leq x \leq b$.

Note que as hipóteses do Teorema 4.1 não requerem que a função $f(x)$ tenha derivada nos extremos a e b do intervalo $[a, b]$.

Definição 4.2 (pontos de máximo e pontos de mínimo locais)

Um ponto x_0*, no domínio da função* f*, é um* ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo* $[a, b]$ *contido no domínio de* f*, com* $a < x_0 < b$*, tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* x *em* $[a, b]$*.*

Assim, x_0 *será um ponto de mínimo local de* f *caso existam intervalos* $[a, x_0]$ *e* $[x_0, b]$ *contidos em Dom*(f) *tais que* f *é decrescente em* $[a, x_0]$ *e é* *crescente em* $[x_0, b]$. *Veja a Figura 4.5.*

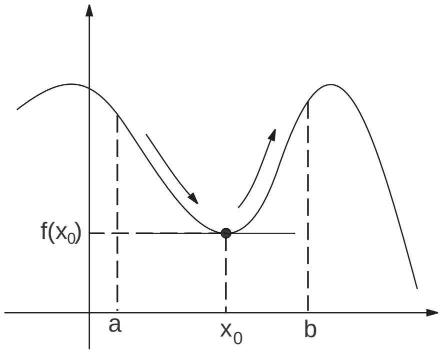


Figura 4.5 x_0 é um ponto de mínimo local. Se f tem derivada em x_0 então $f'(x_0) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Se $f(x) \leq f(x_0)$, *para todo* x *em* $[a, b]$, x_0 *é um* ponto de máximo local de f.

Assim sendo, x_0 *será um ponto de máximo local de* f *caso existam intervalos* $[a, x_0]$ *e* $[x_0, b]$ *contidos em Dom*(f) *tais que* f *é crescente em* $[a, x_0]$ *e decrescente em* $[x_0, b]$. *Veja a Figura 4.6.*

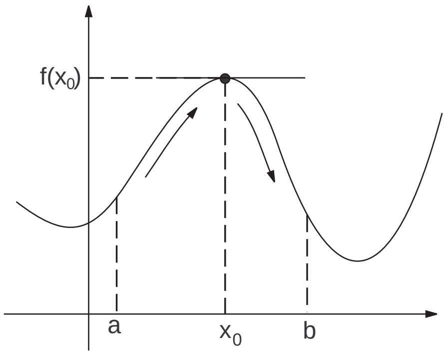


Figura 4.6 x_0 é um ponto de máximo local. Se f tem derivada em x_0 então $f'(x_0) = 0$ pois no ponto $(x_0, f(x_0))$ a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.

4.2 Derivadas de ordem superior

Sendo f uma função, definimos f'' (lê-se "f duas linhas"), a derivada segunda ou segunda derivada de f, como sendo a derivada da derivada de f, ou seja,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Outras maneiras diferentes de escrever a segunda derivada de $y = f(x)$ são:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

A notação $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ é lida "de dois y de x dois".

Analogamente, define-se a terceira derivada de $f(x)$:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Para cada $n \geq 2$, a derivada de ordem n, de $f(x)$ é definida e escrita de diferentes formas:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

4.3 Concavidades do gráfico

Definição 4.3

1. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para cima *(ou* tem concavidade voltada para cima*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semiplano acima de cada reta tangente a ela nesse intervalo (veja a Figura 4.7).*

2. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para baixo *(ou* tem concavidade voltada para baixo*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela (veja a Figura 4.8).*

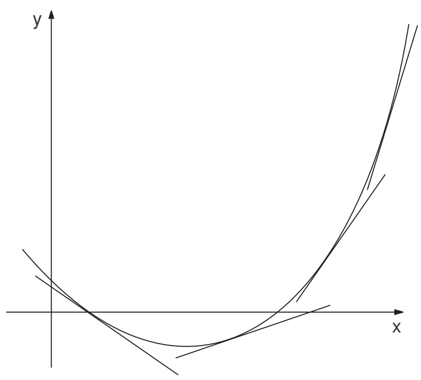


Figura 4.7 Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para cima, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a inclinação da reta tangente ao gráfico, no ponto $(x, f(x))$, aumenta à medida que x cresce, ou seja, a derivada $f'(x)$ é crescente em I, e assim $(f'(x))' > 0$, ou seja, $f''(x) > 0$.

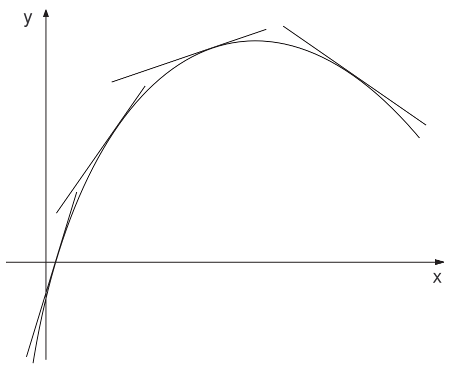


Figura 4.8 Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a inclinação da reta tangente ao gráfico diminui à medida que x cresce, ou seja, a derivada $f'(x)$ é decrescente em I, e assim $(f'(x))' < 0$, ou seja, $f''(x) < 0$.

Teorema 4.2 *Sendo* $f(x)$ *derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto* I*,*

1. *Se* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, a curva* $y = f(x)$ *é côncava para cima no intervalo* I*.*

2. *Se* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, a curva* $y = f(x)$ *é côncava para baixo no intervalo* I*.*

Definição 4.4 (pontos de inflexão da curva $y = f(x)$**)**

Um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um* ponto de inflexão *da curva* $y = f(x)$ *se, ao menos em um pequeno intervalo, esta curva é côncava para cima antes de* x_0*, e é côncava para baixo depois de* x_0*, ou vice-versa. Além disso a curva deve ter reta tangente no ponto* P*.*

Isto quer dizer que o ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um ponto de mudança do sentido de concavidade do gráfico de* f*. Veja Figura 4.9.*

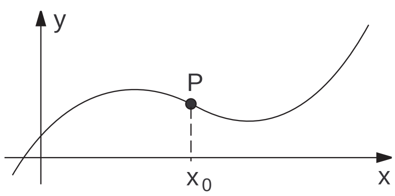


Figura 4.9 P é um ponto de inflexão do gráfico de f. Nesta ilustração, a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo antes de x_0, e côncava para cima depois de x_0.

Tendo em vista o resultado do Teorema 4.2, se $f''(x)$ é contínua, os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $(x, f(x))$ para os quais $f''(x) = 0$.

Exemplo 4.1 *Como primeiro exemplo, consideremos a função* $f(x) = x^2 - 3x$.

Temos $f'(x) = 2x - 3$ e $f''(x) = 2$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3/2,$$

onde o símbolo $\Leftrightarrow$ significa "se, e somente se". Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $x \geq 3/2$, ou seja, no intervalo $[3/2, +\infty[$.

Por outro lado, $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-\infty, 3/2]$.

Desse modo, em $x_0 = 3/2$, temos um ponto mínimo local, que acontece ser o ponto de mínimo de $f(x)$. Note que $f'(3/2) = 0$, pois se x_0 é um ponto de máximo ou mínimo local, de uma função derivável, a reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Como $f''(x) = 2 > 0$ para todo x, o gráfico de f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Com os elementos deduzidos anteriormente, notando que $f(3/2) = -9/4$, e que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^2 - 3x$ na Figura 4.10.

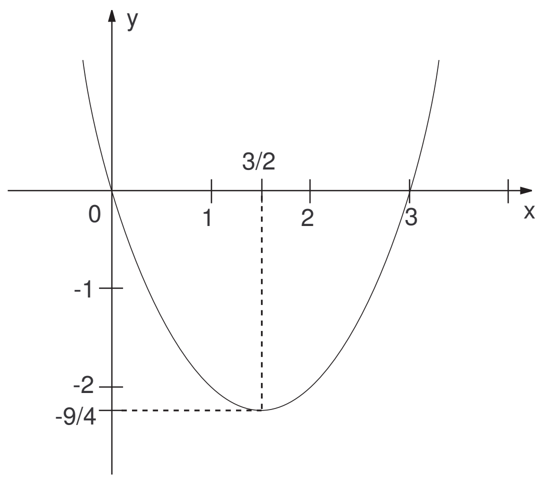


Figura 4.10 Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x$.

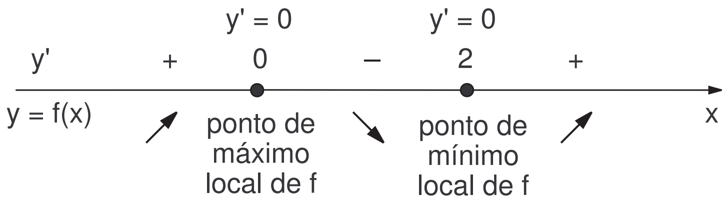
Exemplo 4.2 *Consideremos agora a função* $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) = 3x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 2.$$

Faremos então um diagrama de sinais da derivada. Neste diagrama indicamos os intervalos em que a derivada de $f(x)$ é positiva $(+)$ ou negativa $(-)$ e, simultaneamente, indicamos os intervalos nos quais $f(x)$ é crescente $(\nearrow)$, e aqueles nos quais $f(x)$ é decrescente $(\searrow)$. Indicamos também pontos de mínimo locais e pontos de máximo locais de $f(x)$.



Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e também é crescente no intervalo $[2, +\infty[$, sendo decrescente no intervalo $[0, 2]$. Desse modo 0 é ponto de máximo local de f e 2 é ponto de mínimo local. Repare que 0 e 2 são raízes de $f'(x)$. Assim, nos pontos $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(2, f(2)) = (2, -4)$ as retas tangentes ao gráfico de f são horizontais.

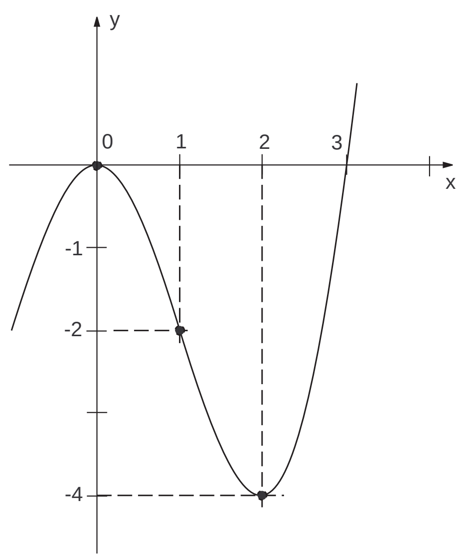


Figura 4.11 Esboço da curva $y = x^3 - 3x^2$.

Analisando a variação de sinal de $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Assim, a curva $y = x^3 - 3x^2$, gráfico de f, tem concavidade voltada para cima quando $x > 1$, e para baixo quando $x < 1$. O ponto $P = (1, f(1)) = (1, -2)$ é um ponto de inflexão do gráfico.

Com os elementos deduzidos anteriormente, notando que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^3 - 3x^2$ na Figura 4.11, no qual levamos em conta também que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4.4 Problemas

Cada uma das funções $f(x)$ dadas a seguir tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$. Para cada uma delas,

(a) Calcule $f'(x)$ e, analisando em um eixo os sinais de $f'(x)$, determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente.

(b) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos.

(c) Calcule $f''(x)$ e, analisando em um eixo os sinais de $f''(x)$, determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo.

(d) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$.

(e) Calcule os limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(f) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço do gráfico de f.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

3. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Respostas e sugestões

1. (a) $f'(x) = -2x + 2$. $f \nearrow$ (é crescente) em $]-\infty, 1]$, e $\searrow$ (é decrescente) em $[1, +\infty[$.

   (b) 1 é ponto de máximo local de f. $f(1) = 2$.

   (c) $f''(x) = -2$. A curva $y = f(x)$ é sempre côncava para baixo.

(d) A curva $y = f(x)$ não tem pontos de inflexão.

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 3]$, e $\nearrow$ novamente em $[3, +\infty[$.

   (b) 1 é ponto de máximo local de f, e 3 é ponto de mínimo local. $f(1) = 4$, $f(3) = 0$.

   (c) $f''(x) = -6x - 12$. A curva $y = f(x)$ é $\frown$ (côncava para baixo) em $]-\infty, 2[$ e $\smile$ (côncava para cima) em $]2, +\infty[$.

   (d) $P = (2, 2)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

   (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. (a) $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

   $f \searrow$ em $]-\infty, -1]$, $\nearrow$ em $[-1, 1]$, e $\searrow$ em $[1, +\infty[$.

   (b) -1 é ponto de mínimo local de f, e 1 é ponto de máximo local. $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$.

   (c) $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

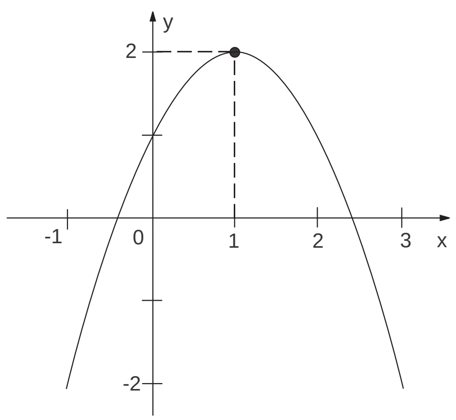
   A curva $y = f(x)$ é $\frown$ em $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $\smile$ em $]-\sqrt{3}, 0[$, $\frown$ em $]0, \sqrt{3}[$ e $\smile$ em $]\sqrt{3}, +\infty[$.

   (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

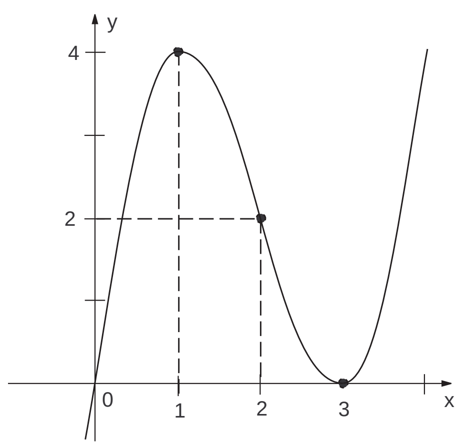
   (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Esboços dos gráficos

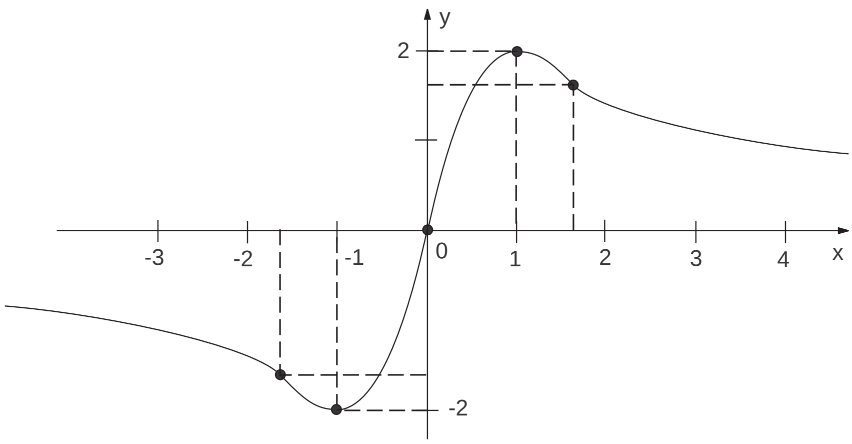
1.



2.



3.



4.5 Esboçando gráficos: um aprofundamento

Aprenderemos agora como esboçar gráficos de funções que tem uma (ou mais de uma) das seguintes peculiaridades:

(i) o denominador na fórmula de $f(x)$ se anula para um ou mais valores de x.

(ii) $f(x)$ é contínua, mas na fórmula de $f'(x)$, ou na fórmula de $f''(x)$, aparece um denominador que se anula para um ou mais valores de x.

(iii) quando $x \to +\infty$ (ou quando $x \to -\infty$), $f(x)$ aproxima-se de uma constante c, e assim a curva $y = f(x)$ aproxima-se indefinidamente da reta horizontal $y = c$ (chamada *reta assíntota horizontal da curva* $y = f(x)$).

Exemplo 4.3 *Esboçar o gráfico da função dada por* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$*, ou seja, esboçar a curva de equação* $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

- *Detectando retas assíntotas verticais.*

Repare que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. O denominador de $f(x)$ se anula quando $x = 2$.

Agora,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

Esses limites laterais, sendo infinitos, detectam que a reta vertical de equação $x = 2$ é uma *assíntota vertical do gráfico de* f. Mais precisamente, esses limites laterais detectam que *quando* $x \to 2^+$*, os pontos correspondentes, no gráfico,* *"sobem" no plano xy, aproximando-se indefinidamente dessa reta, e quando $x \to 2^-$, os pontos do gráfico "descem" no plano xy, também aproximando-se indefinidamente da reta assíntota $x = 2$.*

- *Crescimento e decrescimento.*

Temos

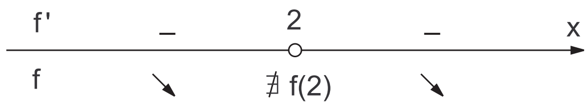
$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x-2) - (x-2)'(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2}.$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}.$$

Assim sendo $f'(x) < 0$ para todo x em Dom$(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Assim, $f(x)$ é decrescente ($\searrow$) antes e depois de $x = 2$, e não pode ter máximos nem mínimos locais.

Para simplificar o estudo da função, fazemos um diagrama de sinais de f' e intervalos de crescimento e decrescimento de f. O símbolo $\nexists$ significa "não existe" ou "não se define".

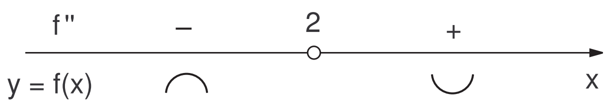


- *Concavidades do gráfico.*

Temos

$$f''(x) = \left[\frac{-5}{(x-2)^2}\right]' = [-5(x-2)^{-2}]' = 10(x-2)^{-3} = \frac{10}{(x-2)^3}.$$

Assim o seguinte diagrama de sinais de f'' e direções de concavidades do gráfico de f:



Como $2 \notin$ Dom(f), o gráfico não tem ponto de inflexão.

- *Comportamento de $f(x)$, quando x tende ao infinito.*

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ e também } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Assim, a reta $y = 2$ é uma *assíntota horizontal à direita e à esquerda do gráfico de* f.

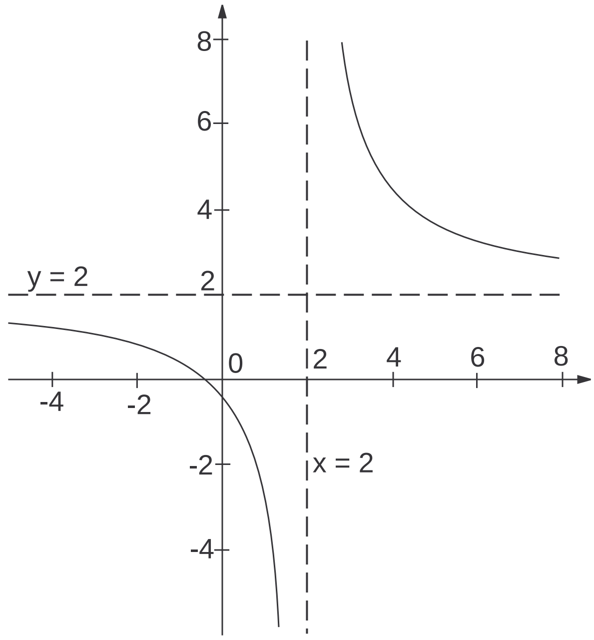


Figura 4.12 Esboço do gráfico de f, com base nos aspectos estudados anteriormente.

Exemplo 4.4 *Esboçar o gráfico de* $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

Neste caso, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, e f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

- *Crescimento e decrescimento.*

Para analisar crescimento e decrescimento da função, calculamos

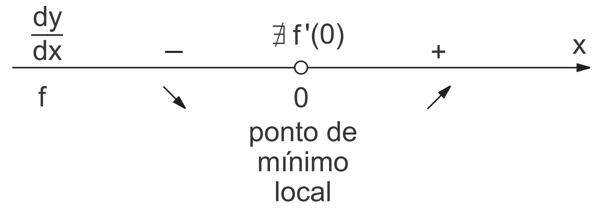
$$\frac{dy}{dx} = (\sqrt[3]{x^2} - 1)' = (x^{2/3} - 1)' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Assim, temos

$$\frac{dy}{dx} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Logo, temos o seguinte diagrama de sinais de f' e intervalos de crescimento e decrescimento de f. Uma vez mais, lembramos que símbolo $\nexists$ significa "não existe" ou "não se define".

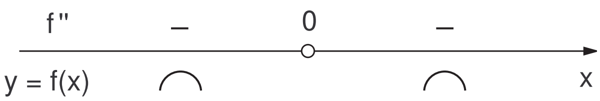
- *Concavidades do gráfico.*



Sendo $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-4/3} = -\frac{2}{9x^{4/3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Logo, obtemos o seguinte diagrama de sinais de f'' e direções de concavidades do gráfico de f:



Note que a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ é contínua, mas não temos $f'(x)$ quando $x = 0$.

É fácil ver que quando $x \to \pm\infty$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ vai para $+\infty$.

Com base no estudo feito, o esboço do gráfico da curva de equação $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$ é mostrado na Figura 4.13.

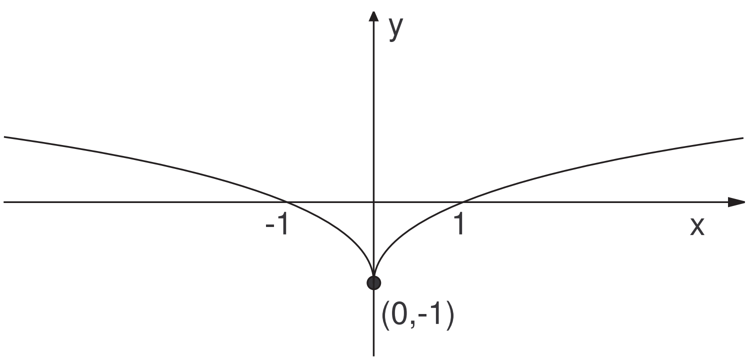


Figura 4.13 Esboço do gráfico da curva de equação $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

4.6 Problemas

Para cada uma das funções dadas a seguir,

(a) Determine o domínio da função e, havendo zeros no denominador de $f(x)$, verifique se a curva $y = f(x)$ tem retas assíntotas verticais.

(b) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente.

(c) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos.

(d) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo.

(e) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$.

(f) Estude o comportamento de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(g) A partir dos dados coletados anteriormente, faça um esboço do gráfico de f.

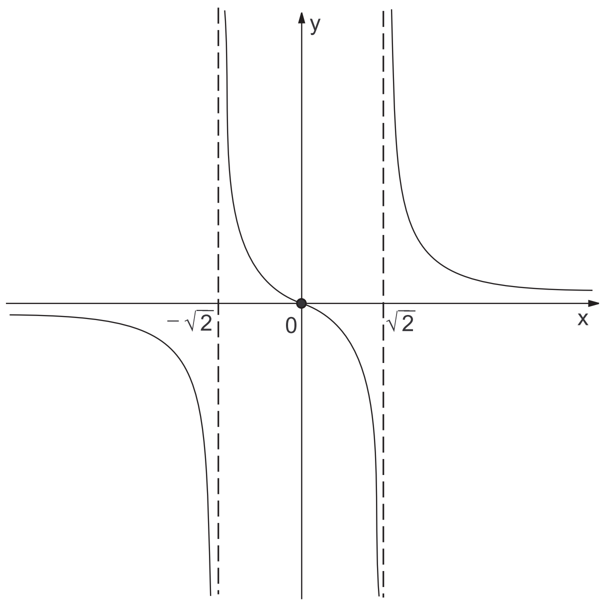
1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$.

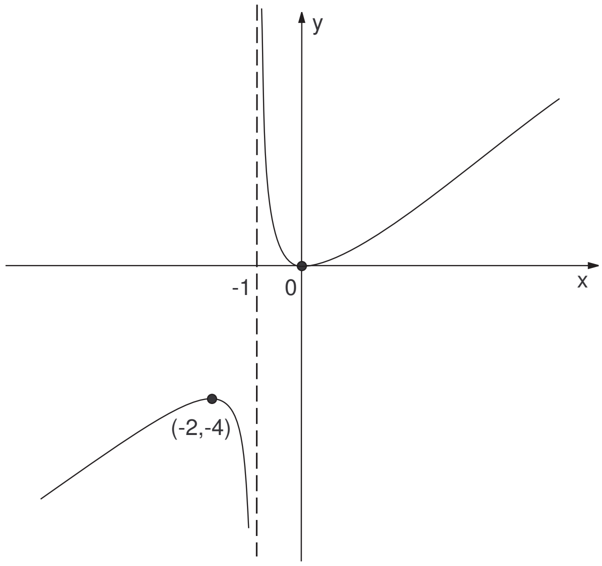
Respostas e sugestões

Daremos como resposta apenas as derivadas primeira e segunda, e o esboço de cada gráfico.

1. $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2}{(x^2 - 2)^2}$, $\qquad f''(x) = -\dfrac{2x^3 + 12x}{(x^2 - 2)^3}$.



2. $f'(x) = \dfrac{2x + x^2}{(1+x)^2}, \qquad f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}.$



UNIDADE 5

Funções exponenciais e logarítmicas, o número e

Nesta unidade faremos uma pequena revisão das funções $f(x) = a^x$ (exponencial) e $g(x) = \log_a x$ (logarítmica), sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Faremos ainda uma apresentação do número e, uma constante importante na matemática universitária.

5.1 Pequena revisão de potências

Sabemos que, sendo a um número real positivo,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{e} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

se $m, n \in \mathbb{Z}$, e $n > 0$. Assim define-se a *potência de base* a *e expoente* p, a^p (lê-se "a *elevado a* p"), para todo número racional p.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e sendo β um número irracional, existe uma sequência, de números racionais, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, que se aproxima indefinidamente de β (isto é, com $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \beta$). Neste caso, a^β é definido como o limite da sequência

$$a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, a^{\beta_3}, a^{\beta_4}, \ldots$$

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ é o limite da sequência

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots$$

Uma calculadora nos fornece as aproximações:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2, \\ 2^{1,4} &\approx 2,6390, \\ 2^{1,41} &\approx 2,6574, \\ 2^{1,414} &\approx 2,6647, \\ 2^{1,4142} &\approx 2,6651. \end{aligned}$$

No que diz respeito às potências de base real positiva e expoente real, temos as seguintes importantes propriedades, que aceitaremos sem demonstração:

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^0 = 1,$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad \text{se também } b > 0.$$

5.2 A função exponencial

Sendo a um número real, positivo, $a \neq 1$, define-se a função exponencial de base a por

$$f(x) = a^x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Tomamos $a \neq 1$ pela simples razão de que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (e a função constante $f(x) = 1$ não é classificada como função exponencial).

Além disso, tomamos $a > 0$ porque, se $a < 0$, a^x não se define para uma infinidade de valores reais de x. Por exemplo, se $a = -4$ então, $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ não é um número real.

Assumiremos que a função exponencial, $f(x) = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ é contínua em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Também assumiremos que se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, com $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, com $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+ (= 0)$.

Na Figura 5.1 temos esboços dos gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

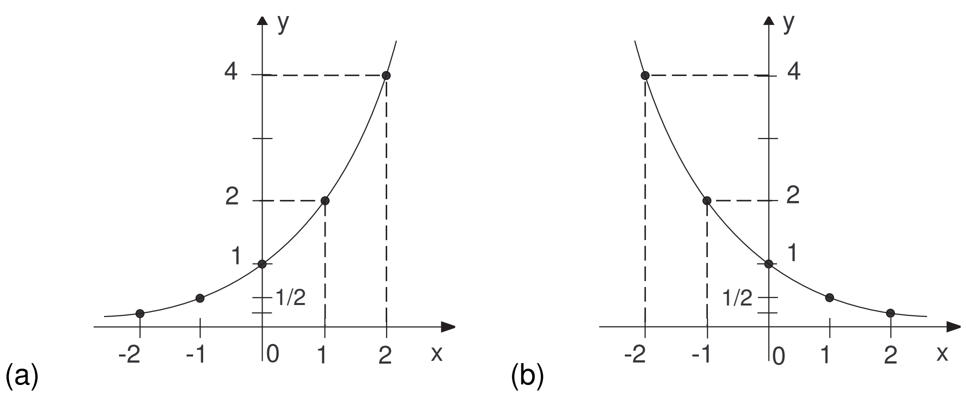


Figura 5.1 Gráficos de (a) $y = 2^x$, (b) $y = (1/2)^x$.

Temos agora as seguintes novidades na *álgebra de limites*:

Se $a > 1$, $a^{+\infty} = +\infty$, $\qquad a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \ (= 0)$.

Se $0 < a < 1$, $a^{+\infty} = 0^+ \ (= 0)$, $\quad a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

Por exemplo, como podemos intuir pelos gráficos na Figura 5.1,

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

5.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Se $a > 0$, $a \neq 1$, e $x > 0$, o *logaritmo de* x *na base* a, denotado por $\log_a x$, é o expoente ao qual devemos elevar a para obtermos x, ou seja

$$\log_a x = y \ \text{ se e somente se } \ a^y = x.$$

Assim sendo,

$$a^{\log_a x} = x.$$

Por exemplo,

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;

$\log_9 27 = \frac{3}{2}$, pois $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$;

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = 1/4$;

$\log_2 5 \approx 2,3219$, pois $2^{2,3219} \approx 4,9999$.

Listamos aqui, sem dedução, algumas propriedades elementares dos logaritmos:

Sendo x e y reais positivos, z real, e $a > 0, a \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y,\\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y,\\
\log_a x^z &= z \cdot \log_a x,\\
\log_a x^{1/z} &= \frac{\log_a x}{z} \quad (\text{se } z \neq 0),\\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{se } b > 0, b \neq 1) \qquad\qquad (\text{mudança de base}).
\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, a passagem dos logaritmos decimais (base 10) para os logaritmos de base 2 é dada por

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log x}{\log 2}.$$

Sendo a função $f(x) = a^x$ contínua e crescente quando $a > 0$, e decrescente quando $0 < a < 1$, temos que $\log_a x$ é definida para todo $x > 0$.

Além disso, se $a > 0$, $\log_a$ é crescente, e se $0 < a < 1$, $\log_a$ é decrescente.

Na Figura 5.2, temos esboços dos gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Admitiremos que $f(x) = \log_a x$ é contínua no seu domínio $]0, +\infty[$, ou seja,

$$\text{se } x_0 > 0 \text{ então } \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

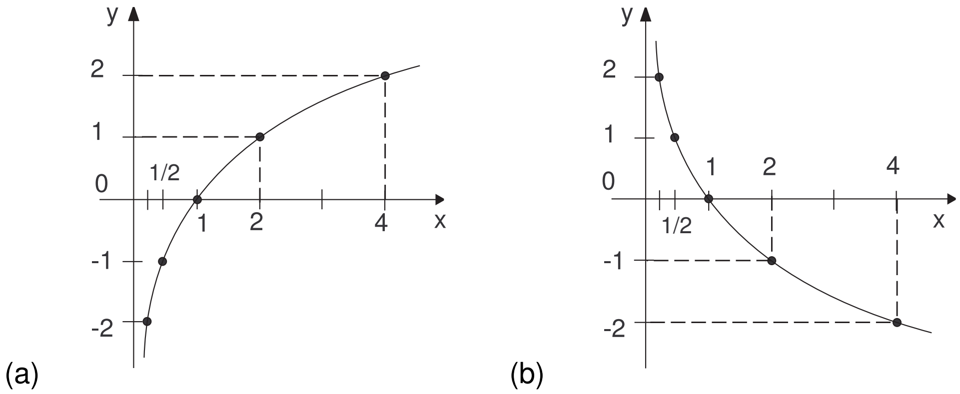


Figura 5.2 Gráficos de (a) $y = \log_2 x$, (b) $y = \log_{1/2} x$.

Além disso, temos ainda (confira isto observando os gráficos da Figura 5.2).

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \log_a(0^+) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases},$$

bem como também (confira observando os gráficos da Figura 5.2)

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

5.4 O número e

Na matemática universitária, há duas constantes numéricas muito importantes. São elas o número *pi*, $\pi \approx 3{,}14159$, e o número e, $e \approx 2{,}71828$.

O número e é definido como sendo o limite

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pode ser demonstrado que o número e é irracional.

Observe a tabela de valores (aproximados) de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$, dada a seguir.

Tabela 5.1 Valores de $\frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n}$, e $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (aproximados), para $n = 1$, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

n	$1/n$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	$2^1 = 2$
10	$0,1$	$1,1$	$(1,1)^{10} \approx 2,59374$
100	$0,01$	$1,01$	$(1,01)^{100} \approx 2,70481$
1000	$0,001$	$1,001$	$(1,001)^{1000} \approx 2,71692$
10000	$0,0001$	$1,0001$	$(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$
100000	$0,00001$	$1,00001$	$(1,00001)^{100000} \approx 2,71828$

Note que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$.

Assim, podemos "enganosamente concluir" que, quando n é muito grande, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$ (mesmo calculadoras de boa qualidade podem nos induzir a este erro). Neste caso, nossa intuição é falha, pois pode ser demonstrado que quando n é muito grande,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828.$$

Assim sendo, temos um novo símbolo de indeterminação: $1^{\pm\infty}$.

Vamos admitir, sem demonstração, os seguintes limites envolvendo o número e.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Se $x > 0$, chama-se *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano* de x ao logaritmo

$$\ln x = \log_e x.$$

Como $e \approx 2{,}71828 > 1$, a função $f(x) = \ln x$ é crescente e seu gráfico tem, qualitativamente, a forma do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, Figura 5.2 a.

A passagem dos logaritmos naturais para os logaritmos decimais (base 10) é dada por

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

5.5 Problemas

1. Calcule os seguintes limites. Lembre-se que $1^{\pm\infty}$ é um símbolo de indeterminação.

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$, (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, (c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$.

2. Sendo $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, calcule os limites laterais $\lim_{x\to0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to0^-} f(x)$.

Respostas e sugestões

1. (a) e^2. *Sugestão*: Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $1 + \dfrac{2}{x} = 1 + \dfrac{1}{y}$,

   (b) $1/e$. *Sugestão.* Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $\dfrac{x}{1+x} = 1 + \dfrac{1}{y}$,

   (c) $(3/2)^{+\infty} = +\infty$.

2. $+\infty$ e 0, respectivamente.

5.6 Derivando funções exponenciais e logarítmicas

Nesta seção estaremos apresentando as derivadas das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

O que faz do número e uma constante tão especial? A resposta está na seguinte nova regra de derivação:

Regra 10

1. *Se* $f(x) = e^x$*, então* $f'(x) = e^x$*. Ou seja, a derivada da função exponencial de base* e *coincide com a própria função.*

2. *Se* $f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$*, então* $f'(x) = a^x \cdot \ln a$*.*

3. *De um modo geral, pela regra da cadeia,* $(e^u)' = e^u \cdot u'$, *e* $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

Para funções logarítmicas, temos as regras de derivação a seguir:

Regra 11 *Derivando em relação a* x*, temos*

1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. 2. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. 4. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

De um modo geral,

5. $(\ln|u|)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$. 6. $(\log_a |u|)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.

Uma consequência do resultado anterior é a regra de derivação:

Regra 12 *Sendo* α *uma constante real, racional ou irracional, e* $u > 0$*,*

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'.$$

Exemplo 5.1 (uma função exponencial de base e expoente variáveis)
Calcular a derivada de

$$f(x) = x^x.$$

Solução. Sendo $y = x^x$, aplicando a função $\ln$ em ambos os membros da igualdade, temos

$$\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x.$$

Derivando ambos os membros em relação a x, por derivação implícita, temos

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)',$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot (\ln x)',$$
$$y' = y\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).$$

Portanto,

$$(x^x)' = x^x(1 + \ln x).$$

5.7 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $y = e^{-3x}$, (b) $y = e^{4x+5}$, (c) $y = 3^{x^2+2x}$,

(d) $y = e^x(1 - x^2)$, (e) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, (f) $y = x^{1/x}$.

2. Calcule as derivadas das seguintes funções. Lembre-se: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

   (a) $y = \ln|ax+b|$, (b) $y = \log_a(x^2+1)$, (c) $y = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$,

   (d) $y = \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$, (e) $y = \ln|x^2+2x|$, (f) $y = (\ln x)^3$.

3. Calcule dy/dx, se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação: (a) $3y - x^2 + \ln(xy) = 2$, (b) $x\ln y - y\ln x = 1$.

4. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + \ln(2x-5)$ no ponto dessa curva de abcissa $x_0 = 3$.

5. Esboce o gráfico de $y = e^{-x^2}$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

6. A posição s de um ponto móvel P sobre um eixo horizontal s é dada por $s(t) = t^2 - 4\ln(1+t)$, $t \geq 0$, sendo s dado em centímetros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P em um instante t qualquer.

Respostas e Sugestões

1. (a) $-3e^{-3x}$, (b) $4e^{4x+5}$, (c) $2(x+1)3^{x^2+2x}\ln 7$, (d) $e^x(1-2x-x^2)$, (e) $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$, (f) $x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$ *Sugestão*: Primeiro aplique a função $\ln$ nos dois membros da igualdade, e logo derive implicitamente, em relação a x.

2. (a) $\frac{a}{ax+b}$, (b) $\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$, (c) $\frac{1}{1+e^x}$, (d) $\frac{4x}{1-x^4}$, (e) $\frac{2x+1}{x^2+x}$, (f) $\frac{3(\ln x)^2}{x}$.

3. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2-1)y}{x(3y+1)}$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

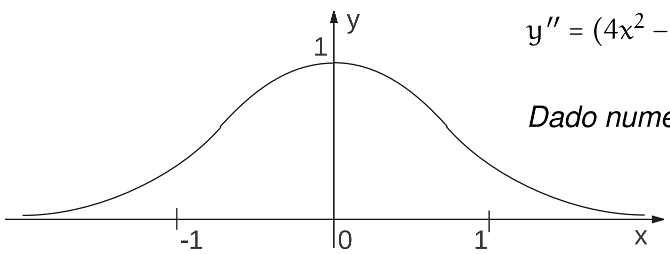
4. $y = 8x - 15$.

5. $v(t) = \frac{2(t^2+t-2)}{t+1}$, $a(t) = 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$.

6. Daremos como resposta apenas as duas primeiras derivadas e o gráfico.

$$y' = -2xe^{-x^2},$$
$$y'' = (4x^2-2)e^{-x^2}.$$

Dado numérico: $e^{-1/2} \approx 0{,}6$.



UNIDADE 6

Funções trigonométricas, regras de L'Hopital

Agora faremos uma pequena revisão de funções trigonométricas e suas derivadas. Estudaremos também um método para calcular limites indeterminados por meio de derivadas.

6.1 Pequena revisão de trigonometria

6.1.1 Trigonometria geométrica

Consideremos os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 6.1. Os dois triângulos são semelhantes, pois seus ângulos internos são iguais (congruentes). Assim, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}.$$

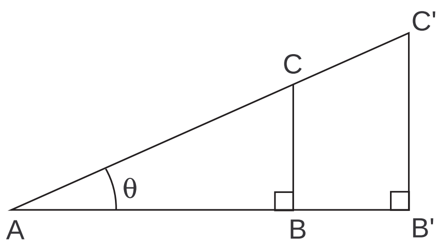


Figura 6.1 Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Assim, sendo ABC um triângulo retângulo, como na Figura 6.1 as razões $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ e $\frac{BC}{AB}$ dependem somente da abertura $\theta = \hat{A}$.

Chamamos

$$\text{cosseno de } \theta = \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}},$$
$$\text{seno de } \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}},$$
$$\text{tangente de } \theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}.$$

Deduz-se imediatamente que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

São bem conhecidos os valores

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
0	1	0	0
$30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	0	1	não se define

Se $\widehat{PQ}$ é um arco de um círculo de raio r, correspondente a um ângulo central de abertura α, o comprimento c de $\widehat{PQ}$ é dado por

$$c = r \cdot (\text{medida de } \alpha \text{ em radianos}).$$

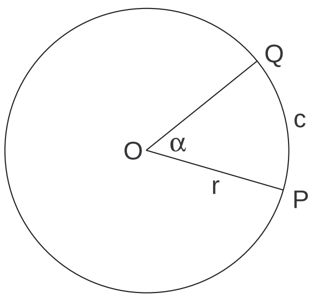


Figura 6.2 O comprimento c do arco circular $\widehat{PQ}$ é dado por $c = \alpha \cdot r$, sendo α a medida do ângulo central em radianos.

Assim, o comprimento c do arco $\widehat{PQ}$ é diretamente proporcional a r e a α. Quando $\alpha = 360°$, temos

$$c = \text{comprimento da circunferência} = 2\pi \cdot r.$$

Assim sendo,

$$360 \text{ graus} = 2\pi \text{ radianos, ou seja, } 180° = \pi.$$

Se $r = 1 =$ *uma unidade de comprimento*, o comprimento c do arco $\widehat{PQ}$ é simplesmente a medida de α em radianos.

A área do setor circular de ângulo central α também é proporcional a α. Quando $\alpha = 2\pi$, temos a área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$. Assim, um setor circular de abertura α, tem área $A_\alpha = \dfrac{\alpha}{2} \cdot r^2 \quad (\alpha \text{ em radianos})$.

6.1.2 Trigonometria analítica

Para definir as funções trigonométricas de variável real, consideramos, em um sistema cartesiano ortogonal, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ (de centro em $(0,0)$ e raio 1). Esta circunferência é o que chamaremos de *círculo trigonométrico*.

Dado um número real α, tomamos $A = (1,0)$ e demarcamos, no círculo trigonométrico, um ponto P_α tal que a medida do percurso de A a P_α, sobre o círculo trigonométrico, é igual a $|\alpha|$ (Figura 6.3).

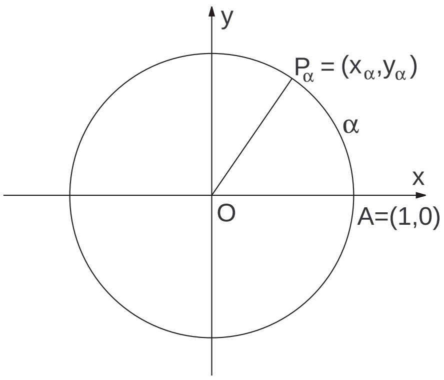


Figura 6.3 α é a medida algébrica do arco orientado AP_α, sendo $A = (1,0)$, e $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ um ponto do círculo trigonométrico.

O percurso $\widehat{AP_\alpha}$ é feito no sentido *anti-horário* se $\alpha > 0$, e é feito no sentido *horário* se $\alpha < 0$. Dizemos que α é a medida algébrica do arco orientado AP_α.

Assim, por exemplo, $P_\pi = P_{-\pi} = (-1,0)$, $P_{\pi/2} = (0,1)$, $P_{-\pi/2} = (0,-1)$, $P_{\pi/4} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_{\pi/3} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, e $P_0 = (1,0) = P_{2\pi} = P_{2n\pi}$, para cada inteiro n.

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, definido como anteriormente. Definimos

$$x_\alpha = \cos\alpha = \text{cosseno de } \alpha,$$
$$y_\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \text{seno de } \alpha.$$

Para estendermos a definição de *tangente de* α a arcos orientados α, tomamos um eixo y', paralelo ao eixo y, de origem $O' = A$, orientado positivamente para cima, no qual usaremos a mesma escala de medidas do eixo y. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos a reta OP_α. Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, esta reta intercepta o eixo y' em T_α. Veja a Figura 6.4. Sendo t_α a abcissa de T_α no eixo y', definimos

$$t_\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \text{tangente de } \alpha.$$

Assim sendo, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Se $0 < \alpha < \pi/2$, os valores $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, e $\operatorname{tg}\alpha$ coincidem com aqueles das definições geométricas de cosseno, seno e tangente, dadas na seção 6.1.1.

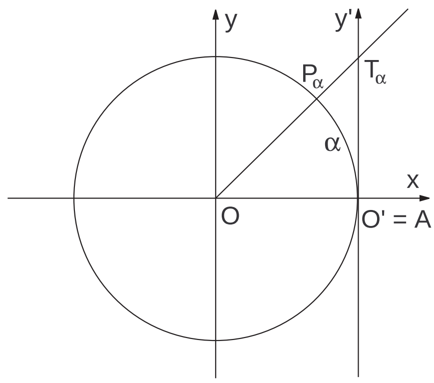


Figura 6.4 No sistema Oxy, $T_\alpha = (1, t_\alpha) = (1, \operatorname{tg}\alpha)$.

Definem também as funções trigonométricas

$$\begin{aligned}
\text{cotangente de } \alpha &= \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} && (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}),\\
\text{secante de } \alpha &= \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} && (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}),\\
\text{cossecante de } \alpha &= \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} && (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Na Figura 6.5, ilustramos geometricamente as seis funções trigonométricas de um arco α no primeiro quadrante, isto é, satisfazendo $0 < \alpha < \pi/2$. Na Figura 6.6 apresentamos esboços dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Listamos a seguir algumas fórmulas úteis, envolvendo as funções trigonométricas. Escreve-se habitualmente

$$\cos^2 a = (\cos a)^2, \quad \operatorname{sen}^2 a = (\operatorname{sen} a)^2, \quad \operatorname{tg}^2 a = (\operatorname{tg} a)^2 \quad \text{etc.}$$

1. $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ (isto porque $x_a^2 + y_a^2 = 1$).
2. $1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\cos^2 a$),

   $1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\operatorname{sen}^2 a$).

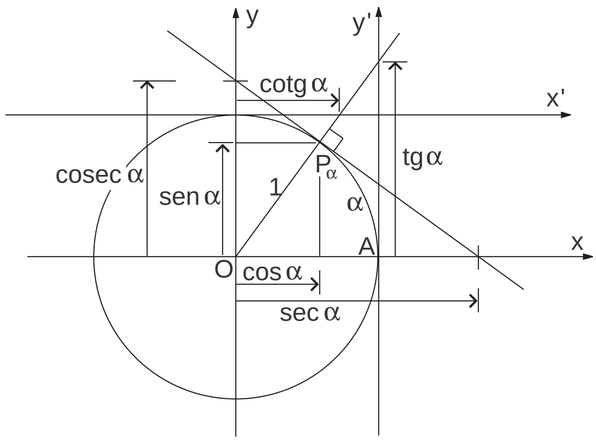


Figura 6.5 Interpretação geométrica das seis funções trigonométricas de um arco α no primeiro quadrante.

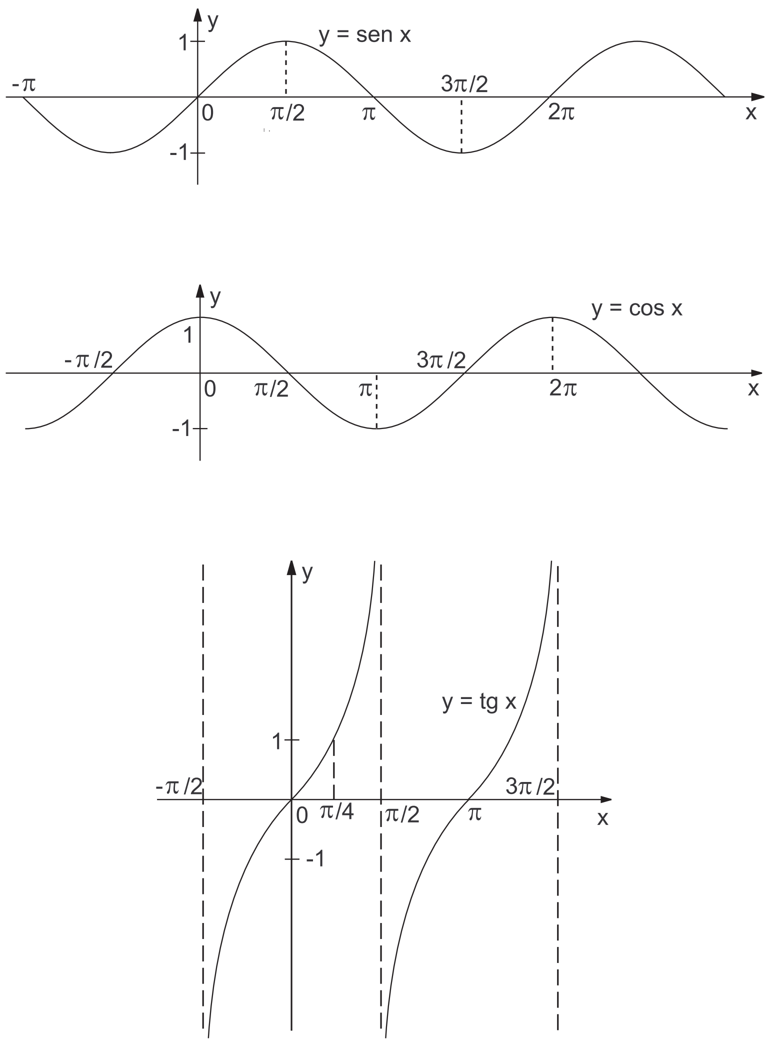


Figura 6.6 Esboços dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

3. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$,

   $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$,

   $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$,

   $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

4. $\cos(-a) = \cos a$, $\quad \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$,
   $\operatorname{tg}(-a) = \dfrac{\operatorname{sen}(-a)}{\cos(-a)} = \dfrac{-\operatorname{sen} a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a$.

5. $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$,

   $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$.

6. $\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, $\quad \operatorname{sen} a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

6.2 Derivando funções trigonométricas

Apresentamos agora as derivadas das funções trigonométricas.

Regra 13 *Derivando em relação a x, temos*

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)' &= \cos x, \\
(\cos x)' &= -\operatorname{sen} x, \\
(\operatorname{tg} x)' &= \sec^2 x, \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\operatorname{cosec}^2 x, \\
(\sec x)' &= \sec x \ \operatorname{tg} x, \\
(\operatorname{cosec} x)' &= -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x.
\end{aligned}$$

De um modo geral, pela regra da cadeia, obtemos

$(\operatorname{sen} u)' = (\cos u)\cdot u'$, $\quad (\cos u)' = -(\operatorname{sen} u)\cdot u'$, $\quad (\operatorname{tg} u)' = (\sec^2 u)\cdot u'$ *etc.*

As derivadas das quatro últimas funções trigonométricas podem ser calculadas a partir das derivadas das funções seno e cosseno, fazendo-se uso das relações

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

e aplicando-se a regra de derivação de quociente, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

6.3 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

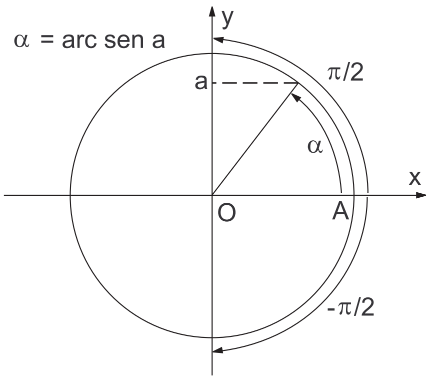
A função arco-seno Para cada número real a, $-1 \leq a \leq 1$, existe um único arco orientado α, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, tal que $\operatorname{sen} \alpha = a$.

Dizemos que α *é o arco cujo seno é* a, ou que α é o *arco-seno de* a, e denotamos isto por

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen} a.$$

Sumarizando,

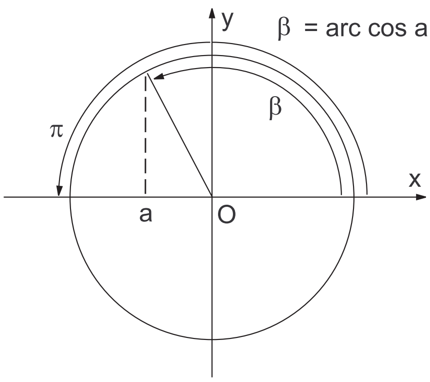
$$\alpha = \operatorname{arc\,sen} a \quad \text{se, e somente se,} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = a \\ -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2 \end{cases}.$$



Assim, por exemplo (confira),

$$\operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

A função arco-cosseno Para cada número real a, $-1 \le a \le 1$, existe um único arco orientado β, $0 \le \beta \le \pi$, tal que $\cos \beta = a$.



Dizemos que β *é o arco cujo cosseno é* a, ou que β é o *arco-cosseno de* a, e denotamos isto por

$$\beta = \operatorname{arccos} a.$$

Sumarizando,

$$\beta = \operatorname{arccos} a \quad \text{se, e somente, se} \quad \begin{cases} \cos\beta = a \\ 0 \le \beta \le \pi \end{cases}.$$

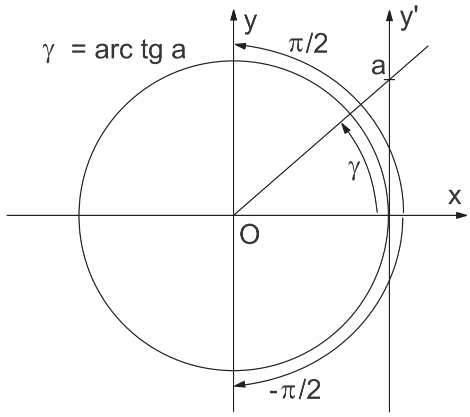
Assim, por exemplo,

$$\operatorname{arccos} 1 = 0,\ \operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},\ \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\ \operatorname{arccos}(-1) = \pi.$$

A função arco-tangente Para cada número real a, $-\infty < a < +\infty$, existe um único arco orientado γ, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, tal que $\operatorname{tg}\gamma = a$.

Dizemos que γ *é o arco cuja tangente é* a, ou que γ é o *arco-tangente de* a, e denotamos isto por

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} a.$$



Sumarizando,

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} a \quad \text{se, e somente, se} \quad \begin{cases} a = \operatorname{tg}\gamma \\ -\pi/2 < \gamma < \pi/2 \end{cases}.$$

Assim, definem-se as funções $\operatorname{arc\,sen} x$ e $\operatorname{arccos} x$, para $-1 \le x \le 1$, e $\operatorname{arc\,tg} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Algumas calculadoras científicas denominam essas funções pelas teclas INV SIN, INV COS ,INV TAN, ou pelas pelas teclas SIN^{-1},COS^{-1},TAN^{-1}.

Regra 14

$$(\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad -1 < x < 1,$$
$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad -1 < x < 1,$$
$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u', \quad -\infty < x < +\infty.$$

6.4 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $y = \operatorname{cotg}(x^3 - 2x)$; (b) $f(x) = \cos 3x^2$;

   (c) $y = \dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$; (d) $g(x) = \cos^2 3x$ ($\cos^2 a$ significa $(\cos a)^2$);

   (e) $y = x^2 \sec^2 5x$.

2. Calcule a derivada da função $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$.

3. Determine y' por derivação implícita.

   (a) $y = x\,\operatorname{sen} y$; (b) $e^x \cos y = x\,e^y$.

4. Esboce o gráfico da função $y = \operatorname{arc\,tg} x$, analisando-a previamente através de derivadas e limites apropriados.

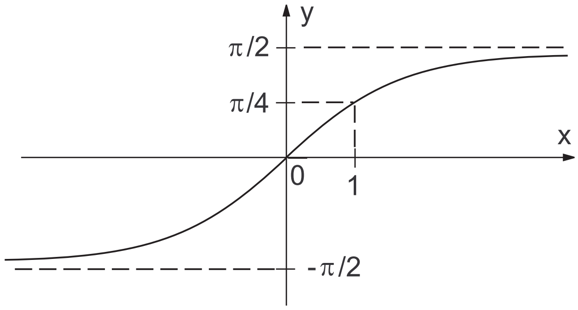
Respostas

1. (a) $-(3x^2 - 2)\operatorname{cosec}^2(x^3 - 2x)$, (b) $-6x \operatorname{sen} 3x^2$, (c) $\frac{4}{1-\operatorname{sen} 4x}$,
   (d) $-3 \operatorname{sen} 6x$, (e) $2x \sec^2 5x + 10x^2 \sec^2 5x \operatorname{tg} 5x$.

2. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

3. (a) $y' = \frac{\operatorname{sen} y}{1 - x\cos y}$, (b) $y' = \frac{e^x \cos y - e^y}{e^x \operatorname{sen} y + x e^y}$.

4. (Daremos as derivadas como suporte à solução)
   $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.



6.5 Limites indeterminados e as regras de L'Hopital

As *regras de L'Hopital* são regras para calcular limites indeterminados, da forma $0/0$ ou ∞/∞, usando derivadas. São duas as chamadas regras de L'Hopital. Uma para formas indeterminadas $0/0$ e outra para formas indeterminadas ∞/∞. Ambas podem ser enunciadas conjuntamente como uma única regra.

Regra 15 (regras de L'Hopital) *Se $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ tem uma forma indeterminada $0/0$ ou ∞/∞, então*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

caso o limite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ exista (sendo finito ou infinito). A regra continua valendo se $x \to a^+$ ou a^-, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

No caso de limites indeterminados de quocientes de polinômios, não precisamos das regras de L'Hopital (podendo usá-las mesmo assim), mas às vezes as regras de L'Hopital são nosso único recurso para o cálculo de um limite:

Exemplo 6.1 *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0,$$

(ou seja, quando $x \to +\infty$, o decaimento exponencial de e^{-x} "anula" o crescimento polinomial de x^3).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} && (= \infty/\infty, \text{ aplicamos L'Hopital})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x} && (= \infty/\infty, \text{ L'Hopital uma segunda vez})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x} && (= \infty/\infty, \text{ L'Hopital uma terceira vez})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Podemos mostrar que para cada inteiro positivo n,

$$\lim_{x\to+\infty} x^ne^{-x} = 0,$$

(ou seja, quando $x \to +\infty$, o decaimento exponencial de e^{-x} "anula" o crescimento polinomial de x^n).

Para mostrar isto, aplicamos as regras de L'Hopital ao limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$ repetidas vezes, enquanto tivermos a indeterminação ∞/∞. Após n aplicações das regras de L'Hopital, concluiremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n!}{e^x} = \dfrac{n!}{+\infty} = 0$.

Exemplo 6.2 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

O limite é indeterminado, da forma $0/0$, e não podemos colocar em evidência nenhuma potência de x. Aplicando as regras de L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} && \text{(= 0/0, aplicamos L'Hopital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} && \text{(= 0/0, aplicamos L'Hopital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$.

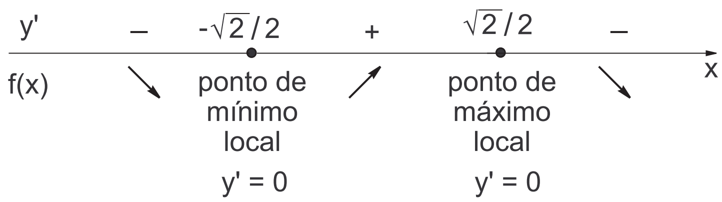
Temos $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty)$. Recorde-se de que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Neste caso, aplicando as regras de L'Hopital, fazemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(= \frac{-\infty}{+\infty}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.4 *Estudar a função* $f(x) = 2xe^{-x^2}$*, e esboçar seu gráfico.*

Solução. Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, e $f'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Os pontos críticos de f são $\pm\sqrt{2}/2$. Lembremo-nos de que, por derivação em cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

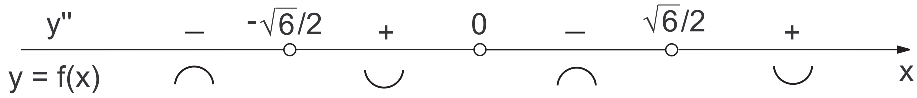


A variação de sinais de f', com a correspondente análise dos intervalos de crescimento e decrescimento de f, é dada no diagrama anterior.

$f''(x) = -12xe^{-x^2} + 8x^3e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(2x^3 - 3x) = 4e^{-x^2}x(2x^2 - 3)$.

$f''(x) = 0$ somente para $x = \pm\sqrt{6}/2$ ou $x = 0$.

A variação de sinais de f'', com a correspondente análise das concavidades do gráfico de f, é dada no diagrama a seguir.



São pontos de inflexão do gráfico os pontos $P_1 = (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}e^{-3/2})$, $P_2 = (0,0)$ e $P_3 = (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}e^{-3/2})$. Temos, $\sqrt{6}/2 \approx 1,3$, $f(-\sqrt{6}/2) = -\sqrt{6}e^{-3/2} \approx -2,5 \cdot 2,2 \approx -0,6$, $f(0) = 0$ e $f(\sqrt{6}/2) = \sqrt{6}e^{-3/2} \approx 0,6$.

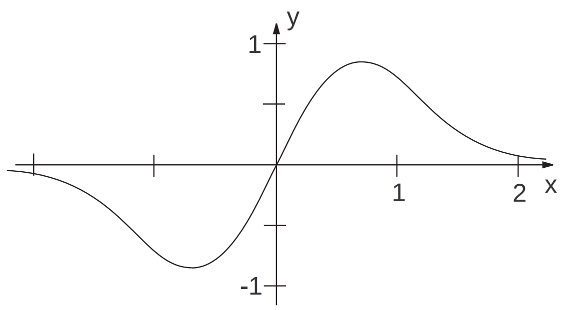


Figura 6.7 Gráfico da função $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Estudando o comportamento de f no infinito, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \pm\infty \cdot e^{-\infty} = \pm\infty \cdot 0.$$

Para evitarmos a indeterminação, fazemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right),$$

e depois aplicamos as regras de L'Hopital, obtendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

Assim, a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal do gráfico de f.

Com base nos dados coletados, o gráfico de f é esboçado na Figura 6.7.

6.6 Problemas

1. Calcule os seguintes limites, aplicando as regras de L'Hopital se necessário.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$; (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^{-x}$; (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 e^{-x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

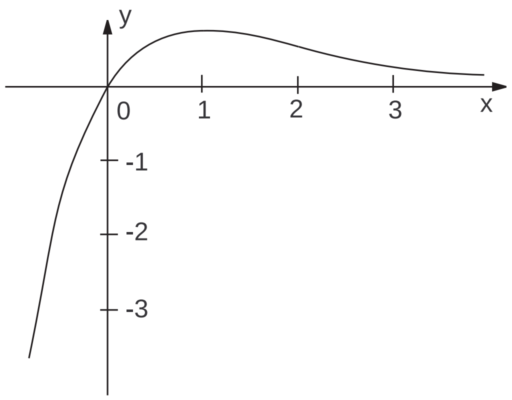
2. Esboce o gráfico da função $y = 2xe^{-x}$.

Respostas

1. a) $-1/3$, (b) 0, (c) 0, (d) $-\infty$, (e) 1.

2. Daremos como resposta apenas as derivadas primeira e segunda, e o esboço do gráfico.

   $y' = 2(1-x)e^{-x}$, $y'' = 2(x-2)e^{-x}$.



Dados numéricos para o gráfico:
$2e^{-1} \approx 0{,}7$,
$4e^{-2} \approx 0{,}5$.

UNIDADE 7

Integrais indefinidas

7.1 Antiderivadas ou integrais indefinidas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que

F é uma *antiderivada* ou uma *primitiva* de f, se $F'(x) = f(x)$

para todo $x \in I$.

Ou seja, F é antiderivada ou primitiva de f se F é uma função cuja derivada é f.

Como primeiros exemplos, temos

$f(x)$	primitiva de $f(x)$
$3x^2$	x^3
2	$2x$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$

Observação 7.1 *Se F é antiderivada de f em I, e c é uma constante, então $F + c$ também é uma antiderivada de f em I.*

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então

$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

Assim, por exemplo x^3, $x^3 + 5$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas de $3x^2$.

Proposição 7.1 *Se F_1 e F_2 são antiderivadas de f, em $I \subset \mathbb{R}$ (I um intervalo), então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$.*

Definição 7.1 (Integral indefinida) *Sendo F uma primitiva de f no intervalo I, chama-se* integral indefinida de f*, no intervalo I, à primitiva genérica de f em I, $F(x) + C$, sendo C uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Nesta notação, omite-se o intervalo I. Sumarizando,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

7.2 Integrais indefinidas imediatas

Coletaremos as primeiras integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

Proposição 7.2

1. $\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, *se* $\alpha \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.
3. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. $\int e^x\, dx = e^x + C$.
6. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$ *(*$a > 0, a \neq 1$*).*
7. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
9. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$.
10. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$.

Para verificar a validade das integrais anteriores, basta verificar que a derivada (em relação a x) do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração no primeiro membro.

Como exemplos:

- $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\cdot\dfrac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^\alpha$, se $\alpha \neq -1$.
- $(\ln|x|)' = 1/x$:
  se $x > 0$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$;
  se $x < 0$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = 1/x$.
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, logo $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$.

7.3 Manipulações elementares de integrais

Proposição 7.3 *Se* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x) + C$*, então, sendo* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*,*

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$
3. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C.$
4. $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C.$
5. $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C.$
6. $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$
7. $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

7.4 Exemplos elementares

1. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$. Logo,
   (a) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C;$
   (b) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C.$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$. Assim,
   (a) $\int e^{x-5}\,dx = e^{x-5} + C;$
   (b) $\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x} + C;$
   (c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$
3. Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

   $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

   Temos $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, logo $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

   Assim,

   $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x - \int 1\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$
4. Calcular $\int (5\cos x + \cos 5x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int (5\cos x + \cos 5x)\,dx &= 5\int \cos x\,dx + \int \cos 5x\,dx \\ &= 5\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C.\end{aligned}$$

5. Calcular $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

   Temos $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, logo $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

6. Calcular $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \int x^{-1/2} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln |x| + C = 2\sqrt{x} + \ln |x| + C.\end{aligned}$$

7.5 Integração por mudança de variável ou integração por substituição

Suponha que

$$\int f(u) \, du = F(u) + C. \tag{7.1}$$

Podemos substituir $u = \varphi(x)$ na expressão 7.1, fazendo $du = \varphi'(x) \, dx$, ou seja, de 7.1 obtemos

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C. \tag{7.2}$$

Ou seja,

$$\int f(u) \, du = F(u) + C \implies \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C,$$

pela mudança de variável $u = \varphi(x)$, tomando-se $du = \varphi'(x) \, dx$.

Observação 7.2 *O símbolo $\implies$ significa "implica", isto é, a veracidade da afirmação à esquerda determina a veracidade da afirmação à direita desse símbolo. Por exemplo, na sentença "Se hoje fizer sol, vou sair", há duas afirmações, "faz sol hoje" e "vou sair", que podem ser verdadeiras ou falsas. Se a primeira afirmação for verdadeira, isto é, sendo verdade que hoje faz sol, então também será verdade que vou sair. Em símbolos, "Faz sol hoje" $\implies$ "vou sair".*

Na prática, quando calculamos $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, tendo-se as considerações anteriores, fazemos $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$, e passamos pela sequência de igualdades:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Exemplo 7.1 *Calcular* $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx$*.*

Solução. Começamos fazendo a substituição $u = 3 - 2x$.

Então $du = \frac{du}{dx} \cdot dx = (3-2x)'\,dx = -2dx$.

Portanto $dx = -\frac{1}{2}du$.

Assim, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= -u^{1/2} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-2x} + C.$$

Exemplo 7.2 *Calcular* $\int \operatorname{tg} x\,dx$*.*

Solução. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx.$

Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, tomamos $u = \cos x$, e obtemos

$du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\,dx.$

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \int \frac{-1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Exemplo 7.3 *Calcular* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$*.*

Solução. Note que $(x^2+5)' = 2x$. Isso sugere que façamos $u = x^2 + 5$, de onde $du = 2x\,dx$, ou seja, $x\,dx = \frac{1}{2}du$.

Temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

7.5.1 Uma tabela mais completa de integrais imediatas

Para ilustrar os conceitos abordados até o presente momento, sumarizamos os fatos imediatos sobre integrais indefinidas na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 Tabela de integrais indefinidas (nas últimas linhas, $a > 0$, e $\lambda \neq 0$).

$\int u^\alpha\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$	$\displaystyle\int \frac{1}{u}\, du = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$	$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
$\int e^u\, du = e^u + C$	$\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a}\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$
$\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$	$\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \sec u\, du = \ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert + C$	$\int \operatorname{cosec} u\, du = -\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert + C$
$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arc\,tg} u + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert + C$
$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\lambda}} = \ln\lvert u + \sqrt{u^2+\lambda}\rvert + C$

7.6 Problemas

Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando, quando necessário, mudança de variáveis. Faça uso das integrais indefinidas da Tabela 7.1.

1. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$.
2. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.
3. $\int \operatorname{sen} ax\, dx$.
4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.
5. $\int \frac{dx}{3x-7}$.
6. $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$.
7. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{3}\, dx$.
8. $\int \operatorname{tg} \varphi \sec^2 \varphi\, d\varphi$.
9. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$.

10. $\int \cos^3 x \,\text{sen}\, x \,dx$.

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

12. $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$.

13. $\int e^{2x}dx$.

14. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

15. $\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx$.

16. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$.

Respostas e Sugestões

1. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

2. $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

3. $-\frac{\cos ax}{a} + C$.

4. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. *Sugestão*: Faça $u = \ln x$.

5. $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$.

6. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$.

7. $3\ln|\text{sen}\,\frac{x}{3}| + C$.

8. $\frac{1}{2}\text{tg}^2\,\varphi + C$. *Sugestão*: Faça $u = \text{tg}\,\varphi$.

9. $\frac{\text{sen}^3\,x}{3} + C$. *Sugestão*: Faça $u = \text{sen}\,x$.

10. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

11. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$. *Sugestão*: Faça $u = 2x^2 + 3$.

12. $\frac{(x^2+1)^5}{5} + C$. *Sugestão*: Faça $u = x^2 + 1$.

13. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

14. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$. *Sugestão*: $u = -x^2$.

15. $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x) + C$. *Sugestão*: $u = 3 + 4e^x$.

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc}\,\text{tg}(\sqrt{2}x) + C$. *Sugestão*: $2x^2 = (\sqrt{2}x)^2$, $u = \sqrt{2}x$.

17. $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc}\,\text{sen}(\sqrt{3}x) + C$.

7.7 O método de integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, explorada anteriormente. O outro método é chamado de *integração por partes*, que exploraremos nesta seção.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I, temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = u(x)v(x) + C,$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) + C.$$

Podemos escrever ainda

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx, \qquad (7.3)$$

considerando que a constante genérica C já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$du = u'(x)\, dx$ e $dv = v'(x)\, dx$, e passamos a fórmula 7.3 à forma abreviada

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \qquad (7.4)$$

As fórmulas 7.3 e 7.4 são chamadas fórmulas de integração por partes.

Exemplo 7.4 *Calcular* $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solução. Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

Teremos $du = 1\, dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$.

Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$, pois uma tal escolha da função v é suficiente para validar a fórmula 7.4.

Temos então

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 7.5 *Calcular* $\int x \ln x \, dx$.

Solução. Tomando $u = \ln x$, e $dv = x\,dx$, obtemos $du = \frac{1}{x}\,dx$, e como $v = \int x\,dx$, obtemos $v = \frac{x^2}{2}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

7.8 Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar por partes uma integral da forma $\int f(x)g(x)\,dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)\,dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)\,dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)\,dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1\,dx$). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos a seguir.

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

L	I	A	T	E
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções. Uma estratégia que funciona bem é realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E. Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente !

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, Exemplo 7.4, fizemos
   $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ (Trigonométrica).
   No anagrama LIATE, A precede T.

2. Na integral $\int x \ln x\, dx$, Exemplo 7.5, fizemos
   $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x\, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, L precede precede A.

7.9 Problemas

Calcule as seguintes integrais, aplicando integração por partes.

1. $\int xe^x\, dx$.
2. $\int \ln x\, dx$.
3. $\int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$.
4. $\int x \cos^2 x\, dx$.
5. $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x\, dx$.

Respostas e Sugetões

1. $e^x(x - 1) + C$.
2. $x(\ln x - 1) + C$.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$. *Sugestão*: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.
5. $(x^2 + 7x - 5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$.

UNIDADE 8

Integrais definidas e aplicações

8.1 A integral definida

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Subdividamos o intervalo $[a, b]$ por meio de $n+1$ pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O conjunto de pontos $\wp = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ constitui uma *subdivisão* ou *partição* do intervalo $[a, b]$.

Tomemos ainda pontos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ em $[a, b]$, tais que

$$c_1 \in [x_0, x_1] = [a, x_1],\ c_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots\ ,\ c_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \ldots\ ,\ c_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Sejam

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots\ ,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ldots\ ,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

E formemos a soma

$S = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$

Esta é uma *soma integral* de f, no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $\wp$, e à escolha de pontos intermediários $c_1, \ldots, c_n$.

Note que, quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$, a soma integral de f, $S = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \leq i \leq n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Isto é ilustrado na Figura 8.1.

Seja Δ o maior dos números Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Escrevemos

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i.$$

Tal número Δ é também chamado de *norma da partição* $\wp$.

A *integral definida de* f*, de* a *até* b (ou *no intervalo* $[a, b]$) é o número real

$$\gamma = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Observação 8.1 *Se* $f(x) > 0$ *no intervalo* $[a, b]$*, quando* $\max \Delta x_i \to 0$*, o número* k*, de sub-intervalos de* $[a, b]$ *tende a* ∞*.*

Os retângulos ilustrados na Figura 8.1 tornam-se cada vez mais estreitos e numerosos à medida que $\max \Delta x_i$ *torna-se mais e mais próximo de* 0*.*

Neste caso, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *definirá a área compreendida entre a curva* $y = f(x)$*, o eixo* x*, e as retas verticais* $x = a$*,* $x = b$*.*

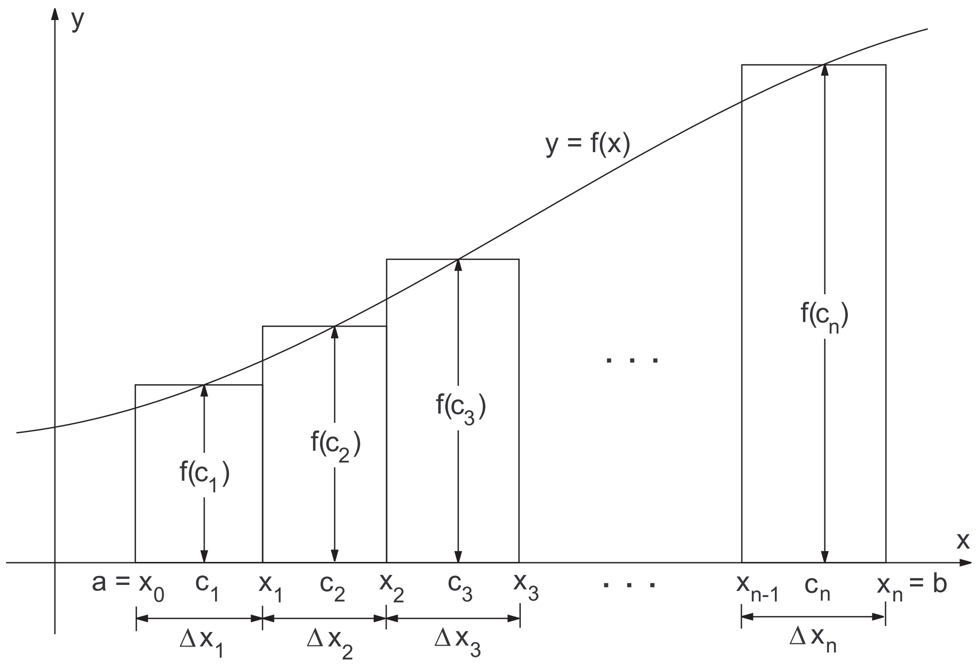


Figura 8.1 Quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$, uma soma integral de f, $S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \leq i \leq n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$.

Sumarizando, se $f(x) \geq 0$ *em* $[a, b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (\textit{área sob o gráfico de } f\textit{, de } x = a \textit{ até } x = b).$$

Observação 8.2 *Por outro lado, se* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in [a, b]$*, teremos* $\int_a^b f(x)\, dx = -A$*, sendo* A *a área (positiva) da região plana compreendida entre o eixo* x*, o gráfico de* f*, e as retas* $x = a$ *e* $x = b$*.*

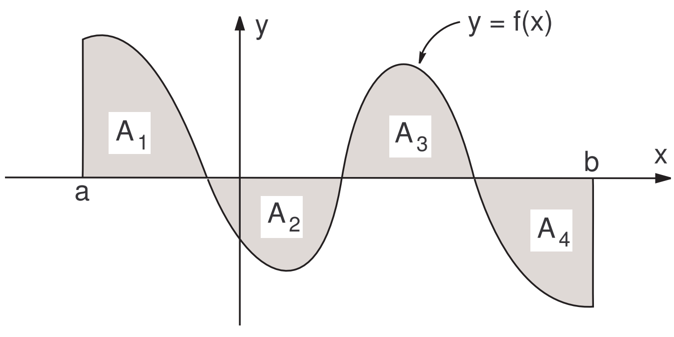


Figura 8.2 $\int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

Observação 8.3 *Se o gráfico de* f*, no intervalo* $[a, b]$*, é como o gráfico esboçado na Figura 8.2, então, sendo* A_1*,* A_2*,* A_3 *e* A_4 *as áreas (positivas) indicadas* *na figura, teremos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4.$$

Assumiremos sem demonstração as seguintes propriedades.

Proposição 8.1 *Se f e g são contínuas em $[a,b]$, então, sendo k uma constante e $a < c < b$,*

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

2. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$

3. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

4. *se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$*

Observação 8.4 *Sendo f contínua em $[a,b]$, são adotadas as seguintes convenções (definições).*

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Adotadas essas convenções, a Proposição 8.1, anteriormente enunciada, continua verdadeira qualquer que seja a ordem dos limites de integração a, b e c, podendo ainda dois deles (ou os três) coincidirem.

8.2 O teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece o modo pelo qual as integrais definidas podem ser calculadas por meio de integrais indefinidas.

Teorema 8.1 (Teorema fundamental do cálculo) *Sendo f uma função contínua no intervalo $[a,b]$,*

$$\textit{se} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \textit{então} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

É costume em cálculo denotar $[F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. Ou seja, sendo $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, obtemos

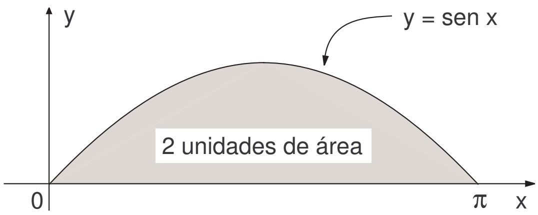
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

.

Exemplo 8.1 *Calcular a área compreendida entre a curva* $y = \operatorname{sen} x$ *e o eixo* x*, para* $0 \leq x \leq \pi$*.*

Solução. Como $\operatorname{sen} x \geq 0$ quando $0 \leq x \leq \pi$, temos que a área procurada é dada pela integral $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$.

Temos $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.



Logo, $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ (unidades de área).

Exemplo 8.2 *Calcular* $\int_{-1}^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Fazendo $u = 1 + x^2$, calculamos $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C$.

Pelo Teorema fundamental do cálculo,

$\int_{-1}^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\Big|_{-1}^1 = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} = 0.$

Exemplo 8.3 *Calcular a área delimitada pela circunferência dada pela equação* $x^2 + y^2 = a^2$.

Para calcular a área A desse círculo, basta calcular a área sob o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, acima do eixo x, entre os pontos $x = -a$ e $x = a$, ou seja, calcular

$$A/2 = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Em uma boa tabela de integrais indefinidas, encontramos:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$$

Assim sendo,

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\
&= \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} \\
&= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} 1 - \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen}(-1) \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{-\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

E portanto a área do círculo é $A = \pi a^2$.

8.3 Problemas

1. Calcule as integrais definidas listadas abaixo.

   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

   (b) $\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

   (c) $\int_{0}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$.

   (d) $\int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$.

   (e) $\int_{0}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$.

   (f) $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$.

   (g) $\int_{1}^{4} \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}}$.

2. Calcule a integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ($0 \le t \le a$), sem usar antiderivadas, interpretando-a como área sob a curva (semicírculo) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$ (Figura 8.3).

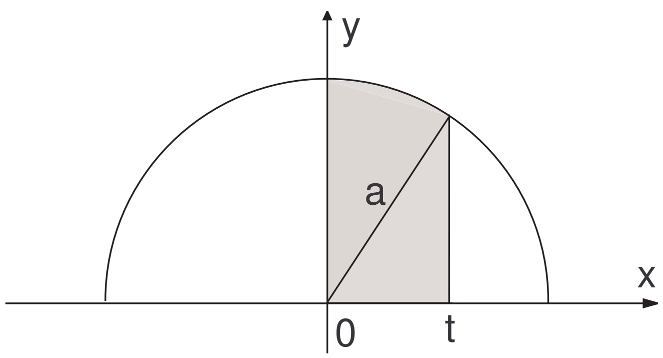


Figura 8.3 Área sob a curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$, subdividida em duas regiões.

Respostas e Sugestões

1. (a) $\pi/2$.

   (b) $\pi/4$.

   (c) $\ln 2$.

   (d) $\ln x$.

   (e) $1 - \cos x$.

   (f) $1/3$.

   (g) $3\sqrt{2}/2$.

2. $\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{t}{a}$. *Sugestão*: Subdivida a área a ser calculada em duas regiões, como sugere a Figura 8.3.

8.4 Aplicações selecionadas da integral definida

8.4.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x, uma fatia retangular vertical, de base Δx, e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, como na Figura 8.4. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

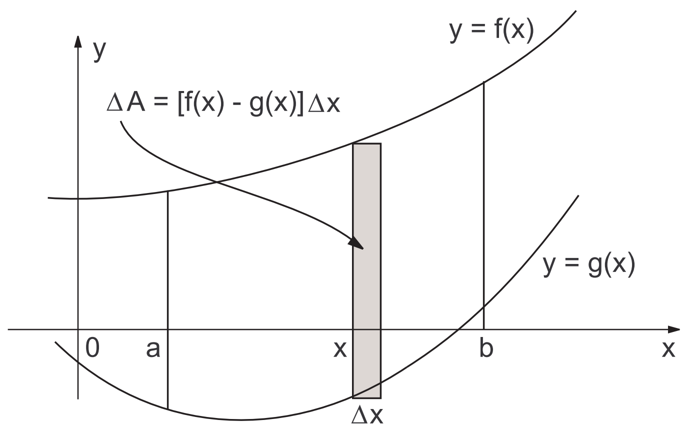


Figura 8.4 Fatia retangular vertical, de base Δx, e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, apoiada à esquerda no ponto x.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos de comprimento Δx, e sobre cada um deles construirmos uma área ΔA, como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x,$$

onde, pelo bem da simplicidade, estamos omitindo os índices do somatório.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \to 0$, ou seja, será dada por

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Logo, $A = \int_a^b dA$.

Além disso, é costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx. O símbolo de integração, $\int$, provém da forma de um arcaico S, e tem o significado de "*soma* (veja isto: *ſoma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais" . Assim, se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\, dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de "elementos infinitesimais de área", de alturas $f(x)$, e base dx, com x "variando" de a até b.

Exemplo 8.4 *Calcular a área delimitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$*.*

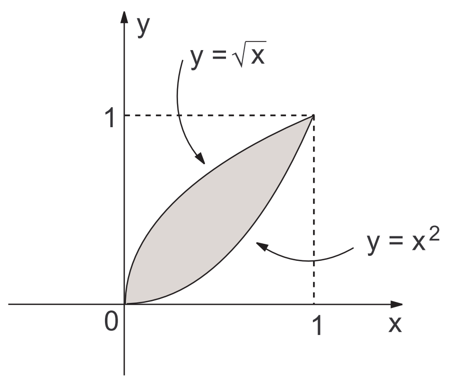


Figura 8.5 Área delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Solução. As curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja Figura 8.5.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por
$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2]\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

8.4.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n+1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

A média aritmética dos $n+1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n+1}.$$

Definiremos a média (ou valor médio) da função f, no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

É possível demonstrar que o valor médio da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, é dado pela integral

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Exemplo 8.5 *Determine o valor médio de* $f(x) = x^2$*, no intervalo* $a \le x \le b$*.*

Solução. O valor médio de f em $[a, b]$, é dado por

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\\ &= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.\end{aligned}$$

8.4.3 Volume de um sólido

Na Figura 8.6, para cada x, $a \le x \le b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (com forma de uma batata, por exemplo) determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento". Qual é o seu volume ?

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ é subdividido em n subintervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$.

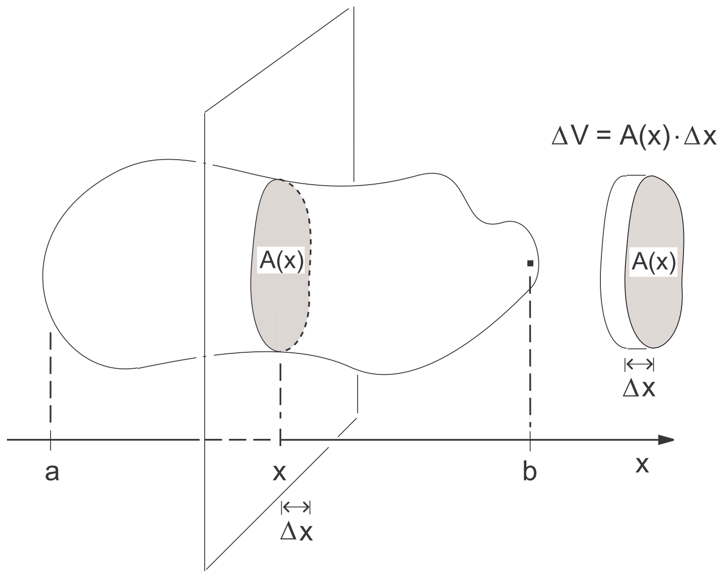


Figura 8.6 Para cada x, $a \le x \le b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (com forma de uma batata) determinando uma secção transversal de área $A(x)$. Uma fatia da batata terá volume $\Delta V = A(x) \cdot \Delta x$.

Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia "cilíndrica", de "base" com área $A(x)$ e "altura" Δx,

$$\Delta V = V(x) \cdot \Delta x.$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_x A(x) \cdot \Delta x,$$

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i, para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias "cilíndricas", mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" dx. Ao "somar" os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x)\, dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 8.6 *Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura* h*, cuja base é um quadrado de lado* a *e cujo topo é um quadrado de lado* b *?*

Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x, demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a, e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b. Veja a Figura 8.7.

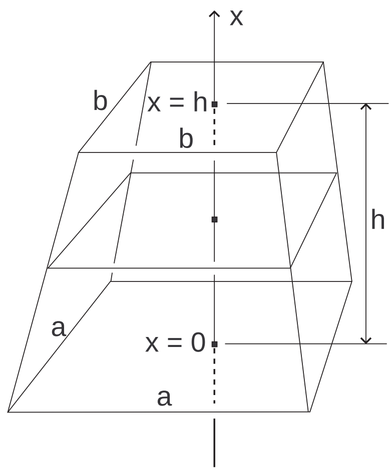


Figura 8.7 Tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$. encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

A área da secção transversal, na altura x, é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2.$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2 dx.$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h}\,dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(x)\,dx &= \frac{h}{b-a}\int_a^b u^2\,du \\ &= \frac{h}{b-a}\cdot\frac{u^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{h}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja Exemplo 8.5). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela civilização egípcia do segundo milênio a.C.

8.4.3.1 Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y, realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x, uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

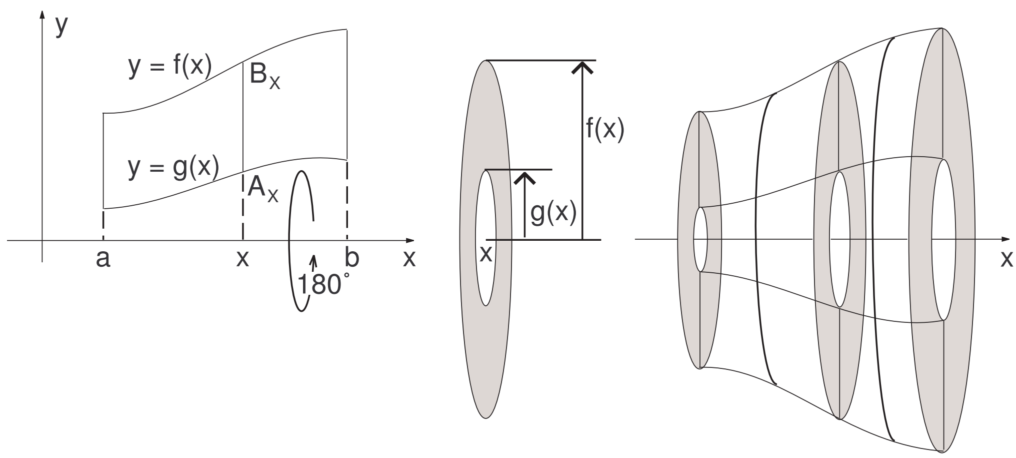


Figura 8.8 Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando o eixo no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal circular ou anular.

Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando este no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x, do segmento vertical A_xB_x, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja Figura 8.8

A área dessa secção transversal é a área de uma região (anular ou circular) plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2, temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2)\,dx.$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx.$$

Exemplo 8.7 *Deduza que o volume de uma esfera de raio* R *é* $\frac{4}{3}\pi R^3$*.*

A esfera de raio R pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semicircular $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x. Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, e $y = 0$, com $-R \leq x \leq R$. Assim, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo

$$dV = A(x)\, dx = \pi[f(x)]^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx,$$

o elemento de volume a integrar.

Portanto,

$$\begin{aligned} V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx &= \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\ &= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

8.5 Problemas

1. Calcule a área delimitada pelas curvas dadas a seguir:

   (a) curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$.

   (b) curvas $xy = a^2$, $x = a$, $y = 2a$ $(a > 0)$ e o eixo x.

   (c) curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y.

2. Determine a média ou valor médio da função dada, no intervalo especificado.

   (a) $f(x) = x^2$, $a \leq x \leq b$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a \leq x \leq b$ $(0 \leq a < b)$.

3. Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

   (a) A elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x.

   (b) O arco de senoide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x.

   (c) A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x, gira em torno do eixo x.

Respostas

1. (a) $1/2$.
   (b) $a^2 \ln 2$.
   (c) 12.
2. (a) $\bar{f} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.
   (b) $\bar{f} = \frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.
3. (a) $\frac{1}{3}\pi ab^2$.
   (b) $\pi^2/2$.
   (c) 32π.

Referências Bibliográficas

[1] N. Piskunov,
Differential and Integral Calculus,
New York: Routledge, 1965.

[2] Peter Almay,
Cálculo Diferencial e Integral (3 vols.),
São Paulo: Kronos, 1977.

[3] Arthur B. Simon,
Calculus with Analytic Geometry,
Glenview, Illinois: Scott Foresman & Co., 1982.

[4] Frank Morgan,
Calculus Lite, 2nd ed.,
Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 1999.

SOBRE OS AUTORES

João Carlos Vieira Sampaio

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio, licenciado em Matemática pelo IBILCE-UNESP de São José do Rio Preto, mestre em Matemática pelo ICMC-USP de São Carlos, e doutor em Matemática pela Rutgers University, a Universidade Estadual de Nova Jersey, Estados Unidos. É Professor efetivo do Departamento de Matemática da UFSCar desde 1977. Leciona para alunos da Licenciatura em Matemática, e para alunos das engenharias da UFSCar em suas disciplinas básicas da área de Matemática. É professor e orientador junto ao programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar. Suas áreas de maior interesse no momento são a História das Ciências da Natureza e da Matemática, e a matemática recreativa como recurso de ensino.

Guillermo Antonio Lobos Villagra

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra, bacharel em Matemática pela Universidad de Talca, mestre e doutor em Matemática pela UNICAMP. Fez pós-doutorado na Espanha nas Universidades de Múrcia e Salamanca. É Professor efetivo do Departamento de Matemática desde 1996 da UFSCar. Tem experiência como pesquisador na área de Matemática, com ênfase em Geometria Diferencial. Participou de projetos de pesquisa: Pronex-Temático da FAPESP/CNPq e Edital Universal do CNPq. Coordenou o Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar. Atualmente faz parte do Conselho de Pesquisa da UFSCar e participa de Projetos de Pesquisa de Pós-Doutorado: PNPD/CAPES; Projetos de infraestrutura: CT-Infra/FINEP; Projetos de Iniciação Científica: OBMEP e PICME ambos do CNPq/IMPA; Projetos de Ensino a Distância da UAB/UFSCar.